

Étude théorique et heuristique du problème d'optimisation Weighted MAX-SAT et application à la répartition d'individus dans des logements en ville

L'étude des variantes du problème de satisfiabilité booléenne est un domaine en expansion et trouvant de nombreuses applications : pouvoir aborder une problématique concrète avec la logique propositionnelle, en utilisant des heuristiques probabilistes, et en approfondissant mes connaissances théoriques sur ce sujet, a ainsi stimulé mon intérêt.

La recherche de logements est une problématique propre à chaque ville et à laquelle font face de nombreuses personnes chaque année, nous avons donc pensé à abstraire ce problème à l'aide de la logique afin de pouvoir proposer des solutions plus générales et applicables à moyenne échelle à cette demande.

Ce TIPE fait l'objet d'un travail de groupe.

Liste des membres du groupe :

- LOZAC'H Titouan

Positionnement thématique (ÉTAPE 1) :

- INFORMATIQUE (*Informatique pratique*)

- INFORMATIQUE (*Informatique Théorique*)

- MATHÉMATIQUES (*Mathématiques Appliquées*)

Mots-clés (ÉTAPE 2)

Mots-clés (en français) Mots-clés (en anglais)

satisfiabilité *satisfiability*

NP-difficile *NP-hard*

résoluble *tractable*

séparer et évaluer *branch and bound*

propagation unitaire *unit propagation*

Bibliographie commentée

L'association de logements à des individus, comme d'autres situations similaires cherchant à répartir un ensemble d'offres entre des demandeurs, peut être modélisée par une instance du problème de satisfaction de contraintes booléennes, ces contraintes étant éventuellement pondérées.

Sous certaines conditions sur l'ensemble des relations manipulées, un problème de satisfiabilité peut être « facile » à résoudre, autrement dit il est résoluble en temps polynomial : ce n'est

cependant pas le cas de la majorité des problèmes considérés, qui sont alors NP-complets [6].

Ce résultat peut même être étendu à une classe plus large de problèmes : les problèmes de satisfaction booléenne sous contraintes pondérées ; on montre sur cette classe de problèmes que lorsque l'ensemble de relations logiques considérées ne permet pas la résolution en un temps polynomial, alors le problème est NP-difficile [7].

En modélisant la situation initiale avec une instance du problème MAX-SAT, dans laquelle les clauses représentent d'une part les exigences de chaque individu et d'autre part les contraintes permettant d'éviter les conflits, on se ramène alors à l'étude d'un problème NP-difficile.

On peut alors chercher différentes heuristiques permettant de s'approcher de la solution optimale : une idée pour cela, que l'on trouve dans [2], est de partir d'une solution qui s'obtient facilement via le méthode de dérandomisation, et d'introduire un paramètre permettant de se ramener à un problème de satisfiabilité en un temps dépendant de ce paramètre, qui sert alors de module à la fois pour la précision de la solution et pour la complexité de son obtention.

Une alternative à cette méthode est d'utiliser des algorithmes probabilistes associés à la dérandomisation pour garantir une approximation suffisamment bonne dans le cas général [3], tout en faisant appel à la programmation linéaire et au principe de relaxation continue pour se ramener à un problème d'algèbre ; c'est d'ailleurs ce qui est fait dans [2], pour introduire des réductions polynomiales permettant la simplification du problème et l'obtention de complexité pertinentes au vu de la paramétrisation. Cette approche y est appliquée au problème MAX-2-SAT, qui est NP-difficile, et permet notamment d'estimer la valeur de retour attendue pour certaines instances.

Lorsqu'on s'intéresse à une généralisation de MAX-SAT, où l'on pondère les clauses, ce qui permet des modélisations plus fines, on s'aperçoit que certaines des méthodes probabilistes précédemment évoquées peuvent être adaptées [3]. La recherche de solution exacte peut quant à elle s'effectuer à l'aide de la méthode séparer et évaluer [1], elle nécessite cependant, pour être efficace, d'avoir une implémentation adaptée favorisant la propagation d'évaluations partielles.

Les opérations logiques sur les formules telles qu'implémentées doivent alors être faciles à manipuler tout en n'exigeant qu'un faible nombre d'opérations machine [5], et les structures utilisées doivent être adaptées à la modélisation choisie.

[4] montre l'intérêt d'une représentation des fonctions booléennes étudiées à l'aide des graphes orientés acycliques, permettant à la fois de visualiser plus facilement les problèmes tout en apportant des outils de preuves et des résultats issus de la théorie des graphes. On y trouve notamment la création du graphe associé à la fonction qui permet, une fois la construction effectuée, d'avoir des opérations linéaires en la taille du graphe.

Problématique retenue

Il s'agit ici d'établir une modélisation, une implémentation et différentes heuristiques permettant d'aborder un problème faisant intervenir un ensemble de contraintes éventuellement pondérées pour associer à des individus un ensemble de logements potentiels sans créer de conflit.

Objectifs du TIPE du candidat

- Modéliser le problème avec une structure de donnée adaptée
- Implémenter un solveur pour Weighted MAX-SAT
- Appliquer la dérandomisation à Weighted MAX-SAT
- Effectuer une approximation de Weighted MAX-SAT à l'aide de la programmation linéaire
- Déterminer par l'expérience les approches probabilistes les plus prometteuses, et vérifier par la théorie les résultats obtenus

Références bibliographiques (ÉTAPE 1)

- [1] F.HERAS, J.LARROSA & A.OLIVERAS : MiniMaxSat : An Efficient Weighted Max-SAT Solver : <https://jair.org/index.php/jair/article/view/10526/25209>
- [2] N.ALON, G.GUTIN, E.J.KIM, S.SZEIDER, & A.YEO : Solving MAX-r-SAT above a Tight Lower Bound : <https://www.tau.ac.il/~nogaa/PDFS/sata10.pdf>
- [3] Y.AZAR : Lecture Notes 6: Approximations for MAX-SAT : <https://www.cs.tau.ac.il/~azar/Methods-Class6.pdf>
- [4] R.E.BRYANT : Graph-Based Algorithms for Boolean Function Manipulation : https://figshare.com/articles/journal_contribution/Graph-Based_Algorithms_for_Boolean_Function_Manipulation/6605990/1
- [5] P.BARROSO, M.PEREIRA & A.RAVARA : Animated Logic : Correct Functional Conversion to Conjunctive Normula Form : https://release.di.ubi.pt/factor/pdfs/Animated_Logic_I_CNF.pdf
- [6] T.J.SCHAEFER : The Complexity of Satisfiability Problems : <https://www.ccs.neu.edu/home/lieber/courses/csg260/f06/materials/papers/max-sat/p216-schaefer.pdf>
- [7] D.COHEN, M.COOPER, & P.JEAVONS : A Complete Characterization of Complexity for Boolean Constraint Optimization Problems : <https://www.irit.fr/publis/ADRIA/VSAT.pdf>

Références bibliographiques (ÉTAPE 2)

- [1] J.E.HOPCROFT, R.MOTWANI & J.D.ULLMAN : Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation

DOT

[1] : *Janvier 2023 : Implémentation des types de données et premiers tests de propagation sur des formules*

[2] : *Février 2023 : Implémentation d'algorithmes générant des formules aléatoires*

[3] : *Avril 2023 : Implémentation du solveur*

[4] : *Avril 2023 : Amélioration du solveur et débogage*

[5] : *Mai 2023 : Implémentation de l'heuristique de Jeroslow*

[6] : *Mai 2023 : Mesures et comparaisons d'efficacité*

[7] : *Juin 2023 : Étude d'algorithmes d'approximation pour Weighted MAX-SAT*