*33557 RAPHAËL Paul*

MPI

# Théorème de Szemerédi-Trotter et applications aux jeux

J'ai décidé de me pencher sur le théorème de Szemerédi-Trotter car le résultat est intéressant en soi ainsi que ses applications. J'ai également trouvé la démonstration assez ingénieuse: elle repose sur des graphes et ses grandes lignes sont compréhensibles sans bagage conséquent en Mathématiques ou Informatique.

On étudie une majoration du nombre d'incidences entre un ensemble de droites et de points, ce qui permet de démontrer des résultats dans un exemple de jeu de type Constructeur-Destructeur. Ce sujet s'inscrit donc dans le thème de l'année, à travers l'application du théorème dans un jeu dans ZxZ.

## Positionnement thématique (ÉTAPE 1) :

- *MATHEMATIQUES (Géométrie)*
- *INFORMATIQUE (Informatique Théorique)*
- *MATHEMATIQUES (Autres)*

## Mots-clés (ÉTAPE 1) :

| **Mots-clés (en français)** | **Mots-clés (en anglais)** |
|---|---|
| *Graphes* | *Graph* |
| *Géométrie planaire* | *Planar Geometry* |
| *Jeux* | *Games* |
| *Incidence* | *Incidence* |
| *Constructeur-Destructeur* | *Maker-Breaker* |

## Bibliographie commentée

En théorie des jeux, étant donné un ensemble de règles qui définissent un jeu à deux joueurs et à information complète à somme nulle, la question posée est généralement l'existence d'une stratégie gagnante pour un des joueurs, et de l'expliciter.

Parmi les jeux les plus documentés, il y a les jeux de type "Constructeur-Destructeur", des jeux positionnels sur une grille, où le premier joueur, appelé constructeur, doit réaliser un certain objectif tandis que l'autre, le destructeur, doit l'en empêcher. Par exemple, le jeu de Hex est un jeu de type Constructeur-Destructeur: le premier joueur doit relier le haut au bas de la grille, tandis que l'autre doit l'en empêcher.

Il existe de nombreux jeux de types “Constructeur-Destructeur”, et a fortiori différentes stratégies dépendant du jeu. On s'interesse à un jeu de ce type dans ZxZ: chacun à leur tour, les deux joueurs vont placer un certain nombre de points dans la grille de jeu, qui est infinie. Le premier tente d’aligner un certain nombre n de points sur une ligne de pente arbitraire, alors que l’autre doit l’en empêcher. Il apparaît que si le constructeur peut placer autant de points qu'il le veut à partir d'un certain tour, il est assuré de gagner à partir d'un certain temps. Ainsi, aux questions usuelles de l’existence de stratégie gagnante s’ajoute la question du nombre de tours nécessaires au premier joueur pour gagner. Cette problématique a été introduite par Erde et Walters dans [3]. Ces derniers ont introduit des fonctions croissantes tendant vers l’ infini qui correspondent au nombre de points qu’un certain joueur peut poser au tour t: ces fonctions peuvent varier selon le joueur, et sont appelées fonctions de placement. Ainsi, le constructeur gagne forcément la partie, ce qui ne constitue pas un résultat très intéressant. Cependant, Erde et Walters ont énoncé que lorsque les fonctions de placement suivent certaines règles, le joueur constructeur ne pourra gagner que lorsque le nombre de points qu’il peut poser par tour est proche de n.

L'idée principale est de compter le nombre de segments possédant assez de points pour que le constructeur gagne au tour suivant. Ainsi, il est naturel de s'intéresser, étant donné un ensemble de lignes et de points, à leurs incidences. Un théorème majeur dans ce domaine est le théorème de Szemerédi-Trotter (1983) qui, pour une collection de points et de droites, donne une majoration assez forte du nombre de couples (point, ligne) où le point appartient à la ligne. Une démonstration de ce théorème est présentée par Székely dans [1]. Sa démonstration s'appuie sur l'inégalité "des croisements", qui minore le nombre d’arêtes qu'il faut retirer à un graphe pour le rendre planaire, et dont une démonstration est présentée par Tao[2].

La démonstration de ce dernier théorème repose sur des considérations géométriques autour des graphes telles que la caractéristique d'Euler, un invariant topologique qui décrit la forme topologique d'un ensemble. Pour les graphes planaires, l'invariant donne une relation entre le nombre d’arêtes, le nombre de sommets et de faces du graphe: la démonstration est donnée en [4].

## Problématique retenue

Comment se donner une majoration non triviale du nombre d'incidences entre des points et des droites, et comment appliquer cela, par exemple, à un jeu Constructeur-Destructeur, en minorant le temps de victoire du premier joueur ?

## Objectifs du TIPE du candidat

1. Démontrer la caractéristique d'Euler sur des graphes planaires.

2. Démontrer l'inégalité des croisements dans un graphe.

3. Utiliser cette inégalité pour démontrer le théorème de Szemerédi–Trotter.

4. Appliquer ce résultat dans un exemple de jeu de type Constructeur-Desctructeur.

## Références bibliographiques (ÉTAPE 1)

**[1]** LASZLO A. SZÉKELY : Crossing Numbers and Hard Erdős Problems in Discrete Geometry *: Combinatorics, Probability and Computing 6.3 (1997)*

**[2]** TERRENCE TAO : The crossing number inequality *: url: https://terrytao.wordpress.com /2007/09/18/the-crossing-number-inequality/.*

**[3]** JOSHUA ERDE, MARK WALTERS : n-in-a-row Type Game *: arXiv preprint arXiv: 1501.01467 (2015)*

**[4]** THOMAS CHOMETTE : Graphe Planaire *: CultureMath, Département de mathématiques appliquées de l'École normale supérieure, p. 1. 2003 URL: http ://culture- math.ens.fr/maths /pdf/combi/planaire.pdf.*

## Références bibliographiques (ÉTAPE 2)

**[1]** JÀNOS PACH ET GÉZA TOTH : Graphs drawn with few crossings per edg *: Combinatorica 17.3 (1997), p. 427-439*

**[2]** PACH, J., RADOICIĆ, R., TARDOS, G., & TÓTH : mproving the crossing lemma by finding more crossings in sparse graph *: Proceedings of the twentieth annual symposium on Computational geometry. 2004, p. 68-75.*

**[3]** MARCO VITTURI : THE POLYNOMIAL METHOD LECTURE 2 SZEMER ´EDI-TROTTER THEOREM AND POLYNOMIAL PARTITIONING

## DOT

**[1]** *: Septembre 2023: Découverte du théorème de Szemerédi-Trotter à travers une lecture du blog de Terence Tao*

**[2]** *: Octobre 2023: Découverte du jeu constructeur destructeur utilisant le théorème*

**[3]** *: Novembre-Décembre 2023: Recherche sur les graphes planaires*

**[4]** *: Janvier 2023: Compréhension de l'utilisation des graphes planaires dans la démonstration du théorème de son utilisation dans le jeu Constructeur Destructeur*

**[5]** *: Février 2023: Questionnement sur la constante dans le théorème de Szemerédi-Trotter; simulations informatiques*

**[6]** *: Mars 2023: Recherche plus poussée autour du théorème de Szemerédi-Trotter, découverte à travers les oeuvres de Pach et Vitturi d'une constante exacte, s'approchant de celle trouvée expérimentalement*