

NOM : RAPHAEL	Prénoms : Paul
Classe : MPER	
Lycée : Hoche	Numéro de candidat : 33557
Ville : Versailles	

Concours auxquels vous êtes admissible (les indiquer par une croix) :

Banque MP		Banque MPI	
ENS Paris-Saclay	MP - Option MP <input type="checkbox"/>	ENS Paris-Saclay	Info MPI <input checked="" type="checkbox"/>
	MP - Option MI <input type="checkbox"/>		
	Informatique <input type="checkbox"/>		
ENS de Lyon	Math - Option M-MP <input type="checkbox"/>	ENS de Lyon	Info MPI <input checked="" type="checkbox"/>
	Math - Option M-MI <input type="checkbox"/>		
	Informatique - Option M <input type="checkbox"/>		
ENS Rennes	MP - Option MP <input type="checkbox"/>	ENS Rennes	Info MPI <input checked="" type="checkbox"/>
	MP - Option MI <input type="checkbox"/>		
ENS Paris	MP - Option P <input type="checkbox"/>	ENS Paris	Info MPI <input checked="" type="checkbox"/>
	MP - Option I <input type="checkbox"/>		
	Informatique <input type="checkbox"/>		

Matière dominante du TIPE (la sélectionner d'une croix inscrite dans la case correspondante) :

Informatique	<input type="checkbox"/>	Mathématiques	<input checked="" type="checkbox"/>	Physique	<input type="checkbox"/>
--------------	--------------------------	---------------	-------------------------------------	----------	--------------------------

Titre du TIPE : **Le théorème de Sylvester - Tracer et les jeux Constructeur - Destructeur**

Nombre de pages (à indiquer dans les cases ci-dessous) :

Texte	5	Illustration	1	Bibliographie	1
-------	----------	--------------	----------	---------------	----------

Attention, les illustrations doivent figurer dans le corps du texte et non en fin du document !

Résumé ou descriptif succinct du TIPE (6 lignes, maximum) :

L'objectif du TIPE est de démontrer, en utilisant des graphes planaires, un théorème majeur du cercle des incidences entre des ensembles de points et de lignes, et de l'utiliser pour démontrer des résultats dans un jeu de type Constructeur - Destructeur.

A Versailles	Signature du professeur responsable de la classe préparatoire dans la discipline C. de Segours D3315	Cachet de l'établissement Lycée HOCHÉ 73, Avenue de St-Cloud 78000 VERSAILLES
Le 03/06/2024		
Signature du (de la) candidat(e) Paul		

La signature du professeur responsable et le tampon de l'établissement ne sont pas indispensables pour les candidats libres (hors CPGE).

Le Théorème de Szemerédi–Trotter et les jeux Constructeur-Destructeur

Paul RAPHAEL-33557

2023

Table des matières

1	Introduction	1
2	Enoncé du Théorème de Szemerédi–Trotter	3
3	Les graphes planaires	3
3.1	La caractéristique d’Euler	3
3.2	L’inégalité des croisements	5
4	Démonstration du théorème de Szemerédi–Trotter	5
5	Corbeilles et répartition	6
6	Démonstration du Théorème 1	6
6.1	Réduction au jeu des corbeilles	7
6.2	Conclusion de la preuve	7
7	Conclusion	7
8	Amélioration du Théorème de Szemerédi–Trotter	8
9	Annexe	9

1 Introduction

Considérons le jeu de type Constructeur-Destructeur suivant : le jeu se déroule dans \mathbb{Z}^2 . Les deux joueurs vont chacun à leur tour capturer des points du plan. Le premier joueur, le constructeur, a pour but d’obtenir sur une même ligne de pente arbitraire un nombre n de points non nécessairement consécutifs, mais sans point du deuxième joueur entre deux de ces points. Quant au second joueur, le destructeur, il a pour but d’empêcher le constructeur de remplir son objectif. Soient deux fonctions (c, d) appelées *fonctions de positionnements* et un entier n , nous définissons un jeu de type (c, d, n) comme suit :

- $n \in \mathbb{N}$ est le nombre de points à aligner.
- $c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ représente le nombre de points que le constructeur peut placer à chaque tour (en arrondissant à la partie supérieure).
- $d : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ représente le nombre de points que le destructeur peut placer à chaque tour (en arrondissant à la partie inférieure).

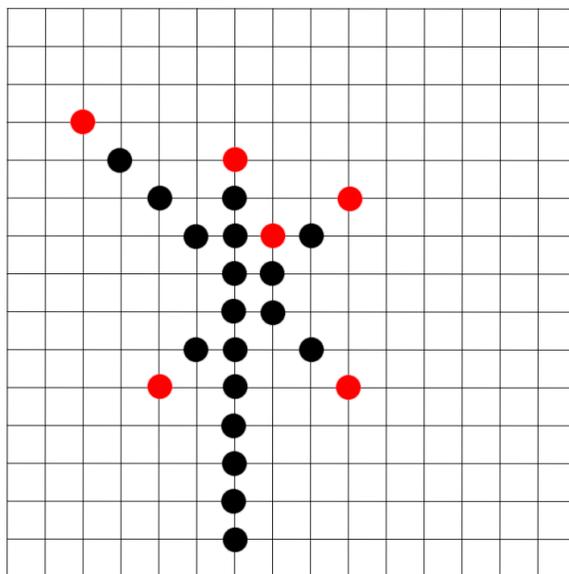


FIGURE 1 – Partie finie pour $n=10$, $c(t)=2t$, $d(t) = t$

Le constructeur est en noir, le destructeur en rouge.

Nous allons ainsi supposer dans la suite de l'étude que la fonction du constructeur diverge en $+\infty$, ce qui lui garantit la victoire quelle que soit la valeur de n , et nous nous concentrons sur l'estimation du temps de victoire du constructeur : peut-il gagner rapidement ou doit-il attendre de pouvoir placer plus de n points et gagner uniquement par défaut ? L'étude dépend bien sûr du choix des fonctions d et c .

Le résultat principal est le suivant.

Théorème 1 (Calcul du temps de victoire). *Soit $\alpha > 0$ et $c(t) = t^\alpha$. Soit $d(t)$ une fonction de placement telle que*

$$\left| \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d(t)}{\log(t)} = +\infty \text{ si } \alpha > 1 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d(t)}{t^{1-\alpha}} = +\infty \text{ si } \alpha < 1 \end{array} \right.$$

Soit $(\tau_n)_{n \geq 1}$ le temps de victoire pour le jeu (c, d, n) . Alors

$$c(\tau_n) = [1 + o_{n \rightarrow \infty}(1)] n.$$

La démonstration de ce théorème repose sur l'idée que quand le constructeur place ses points, il ne peut pas remplir trop de lignes à la fois. Les grandes étapes sont les suivantes : on définit un segment actif au cours de la partie comme une portion de droite sans aucun point du destructeur et de taille au moins n . Intuitivement, cela correspond aux endroits que le constructeur peut encore utiliser pour gagner. En partie 2, nous présentons le théorème de Szemerédi–Trotter qui s'intéresse à la majoration du nombre d'incidences entre des ensembles de points et de lignes. En partie 3, nous introduisons la caractéristique d'Euler et ses propriétés en affinant des idées de [1]. C'est un outil fondamental pour démontrer l'inégalité des croisements, [6], qui combinée avec la méthode probabiliste introduite dans [5] permet de démontrer le théorème de Szemerédi–Trotter. Nous étudions en partie 5 un autre jeu présenté par [2] auquel on peut réduire notre jeu principal, avant de montrer le théorème 1 en partie 6. Les deux dernières parties sont des compléments : la partie 7 utilisera les résultats de [4] et de [3] afin d'affiner et de préciser le théorème de Szemerédi–Trotter. L'annexe présente en fin de document apporte des précisions sur certaines preuves.

2 Énoncé du Théorème de Szemerédi–Trotter

Soit P et L des ensembles finis de points et de droites, on veut estimer le cardinal de l'ensemble

$$I(P, L) = \{(p, l) \in P \times L \mid p \in l\}.$$

La majoration triviale est $|I(P, L)| \leq |L||P|$. Cependant, ce cas correspondrait à la situation où chaque point appartient à chaque droite. Ainsi, si on a au moins deux droites et 2 points, il apparaît que le cas d'égalité est impossible puisque les deux droites ne peuvent avoir qu'un point en commun. Utilisons cette remarque et l'inégalité de Cauchy-Schwarz [7] pour estimer

$$\begin{aligned} |I(P, L)| &= \sum_{l \in L} \sum_{p \in P} \mathbf{1}(p \in l) \\ \Rightarrow |I(P, L)|^2 &\leq |L| \sum_{l \in L} \left(\sum_{p \in P} \mathbf{1}(p \in l) \right)^2 = |L| \sum_{l \in L} \left[\sum_{p \in P, p' \in P} \mathbf{1}(p \in l)(p' \in l) \right] \end{aligned}$$

La double somme correspond au cardinal de l'ensemble des triplets

$$(p, p', l) \in P \times P \times L, \quad (p, p') \in l \times l.$$

On remarque que les couples où $p = p'$ sont au nombre de $|I(P, L)|$. Quand à ceux où $p \neq p'$, puisque par deux points passe une unique droite, on en trouve au plus $|P|^2$. Ainsi, $|I(P, L)|^2 \leq 2 \max(|L||I(P, L)|, |L||P|^2)$ ce qui donne la majoration précisée

$$|I(P, L)| = O(|L| + |L|^{\frac{1}{2}}|P|).$$

Cependant, on peut faire encore mieux.

Théorème 2 (Szemerédi-Trotter). *Si on se donne P un ensemble de points distincts, et L un ensemble de lignes distinctes, alors en notant*

$I(P, L) = \{(p, l) \in P \times L \mid p \in l\}$, on a

$$|I(P, L)| = O\left(|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + |P| + |L|\right) \quad (1)$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons d'abord nous intéresser aux graphes planaires.

3 Les graphes planaires

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Il est représenté par un ensemble d'arêtes et de sommets. Ceci permet de plonger notre graphe dans le plan en représentant les sommets comme des points et en traçant un trait entre deux points si et seulement si les sommets correspondants sont sommets d'une même arête. On assimile les points aux sommets et les traits aux arêtes. Lorsqu'il existe une telle représentation où deux arêtes ne se croisent pas, on dit que le graphe est planaire, et une telle représentation est dite planaire.

Nous supposons dorénavant que tous les graphes considérés sont simples et sans boucles.

3.1 La caractéristique d'Euler

Dans cette section, les graphes considérés sont planaires et connexes, sauf mention explicite du contraire. Soit G un graphe, lorsqu'on regarde une représentation donnée dans le plan, des éléments tels que le nombre de points et d'arêtes sont constants, tandis que le nombre de faces varie d'une représentation à l'autre. On s'arrêtera ici à la notion intuitive de face, sans tenter d'en donner une définition trop poussée. Nous allons montrer le théorème suivant :

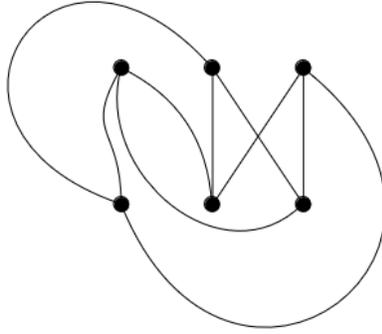


FIGURE 2 – Graphe $K_{3,3}$: non planaire

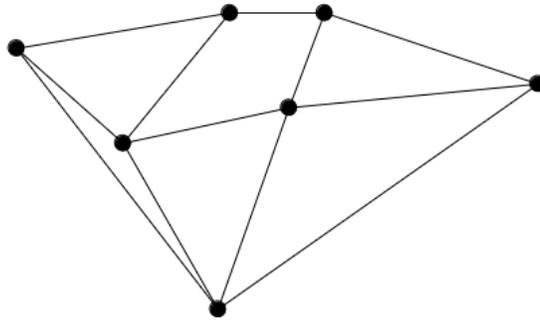


FIGURE 3 – Exemple de graphe planaire

Théorème 3 (Caractéristique d’Euler). *Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire connexe. Pour toute représentation planaire du graphe, si on note F le nombre de faces du graphe, on a :*

$$|V| - |E| + F = 2$$

Le cœur de la démonstration est le lemme suivant.

Lemme 1. *Soit G un graphe planaire. On peut construire ce graphe en partant d’un arbre et en ajoutant des arêtes successivement, tout en conservant le caractère planaire à chaque étape.*

La démonstration est une récurrence sur le nombre de cycles élémentaires du graphe (qui est nécessairement fini). (Plus de précisions en annexe). On en déduit une démonstration du Théorème de la caractéristique d’Euler.

Démonstration. On se donne G un graphe, et on le plonge dans le plan de manière planaire. Le lemme 1 s’applique, et cette représentation planaire peut s’obtenir par ajout successif d’arêtes depuis un arbre tout en conservant le caractère planaire à chaque étape.

- Si G est un arbre, alors par caractérisation des arbres $|E| = |V| - 1$ et on n’a qu’une face, la face extérieure. Ainsi on a bien $|V| - |E| + F = 2$
- Sinon, on effectue la construction du lemme 1, et à chaque étape on rajoute une arête et une face, donc pour la construction donnée par le lemme 1, la quantité $|V| - |E| + F$ est un invariant.

□

Remarque 1. On remarque, grâce à la caractéristique d'Euler, que pour un graphe planaire G , le nombre de faces d'un plongement planaire dans le plan est indépendant du plongement choisi. Cela permet donc de définir le nombre de faces d'un graphe planaire connexe G comme le nombre de faces de n'importe quel plongement planaire. En raisonnant sur les composantes connexes du graphe on peut montrer que c'est le cas pour n'importe quel graphe planaire, sans l'hypothèse de connexité.

En retirant l'hypothèse de connexité, et en appliquant ce qui précède aux composantes connexes du graphe, on a

Corollaire 1. Soit G un graphe planaire, alors $|V| - |E| + F \geq 2$

Proposition 1. Pour G un graphe planaire, on a $|E| \leq 3|V|$

Démonstration. L'hypothèse de simplicité du graphe assure que chaque face est adjacente à au moins 3 arêtes, tandis que chaque arête est adjacente à exactement 2 faces, ce qui donne $3|F| \leq 2|E|$. Si G est connexe, en appliquant le Corollaire 1, on obtient $|E| \leq 3|V| - 6 \leq 3|V|$. \square

3.2 L'inégalité des croisements

Si on se donne un graphe G , lorsque celui-ci n'est pas planaire, à chaque représentation P dans le plan il y aura des intersections entre plusieurs arêtes du graphe, appelées *croisements* et $cr(P)$ est le nombre de croisements. On note $cr(G)$ le minimum des $cr(P)$ pour les P représentant G . On veut minorer $cr(G)$.

Par définition, il existe un graphe planaire simple $G' = (V, E')$ s'obtenant en retirant au plus $cr(G)$ arêtes de G , et donc :

$$|E| - cr(G) \leq 3|V| \Rightarrow cr(G) \geq |E| - 3|V|.$$

On peut obtenir une minoration plus intéressante.

Théorème 4 (Inégalité des croisements). Soit $G = (E, V)$ un graphe connexe simple. Si $|E| \geq 4|V|$ alors

$$cr(G) \geq \frac{|E|^3}{64|V|^2} \tag{2}$$

Démonstration. On se donne p tel que $0 < p < 1$. On construit un graphe $G' = (E', V')$ comme suit : pour chaque sommet de V , on la prend dans V' avec une probabilité de p . Ainsi, une arête de E est dans E' si ses deux extrémités survivent, soit une probabilité de p^2 . Dans le graphe optimal, chaque croisement est dû à deux arêtes n'ayant aucun sommet en commun (admis), donc la probabilité qu'un croisement survive est p^4 . En passant à l'espérance, on a

$$\mathbb{E}[cr(G')] \geq \mathbb{E}[|E'|] - 3\mathbb{E}[|V'|]$$

soit

$$p^4 cr(G') \geq p^2 |E'| - 3p |V'|.$$

Ainsi, si $|E| \geq 4|V|$, on prend $p = \frac{4|V|}{|E|}$ ce qui donne le résultat souhaité :

$$cr(G) \geq \frac{|E|^3}{64|V|^2}.$$

\square

4 Démonstration du théorème de Szemerédi–Trotter

La démonstration du théorème est maintenant accessible. Pour cela, il s'agit de construire un graphe astucieux auquel on applique l'inégalité des croisements.

On se donne P et L nos ensembles finis de points et de lignes. Soit le graphe $G = (P, E)$ où E est l'ensemble des parties de ligne, c-a-d qu'il y a une arête de x à y si x et y sont sur la même ligne. Le graphe est simple par construction, avec au plus $|L|^2$ points d'intersection, soit $|L|^2 \geq cr(G)$. Enfin, chaque ligne avec k points engendre $k - 1$ arêtes dans G . On suppose pour le moment que chaque ligne doit être incidente à deux points au minimum, donc $|E| = |I(P, L)| - |L|$. Ainsi :

— soit $|E| < 4|P|$ ie $|I(P, L)| \leq |P| + |L|$, ce qui donne $|I(P, L)| = O(|P| + |L|)$

— soit on peut appliquer le théorème 3, qui donne $|L|^2 \geq \frac{(|I(P, L)| - |L|)^3}{64|P|^2}$ soit $|I(P, L)| = O(|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + |L|)$

On peut à présent retirer l'hypothèse que chaque ligne contient au moins deux points, car les incidences dues à ces lignes sont un $O(|L|)$, ce qui conclut la démonstration du Théorème de Szemerédi-Trotter.

On en déduit le corollaire suivant :

Corollaire 2. *Pour $|P|$ et $|L|$ des ensembles de points et lignes, alors le nombre de lignes contenant au moins k points est $O\left(\frac{|P|^2}{k^3} + \frac{|P|}{k}\right)$.*

5 Corbeilles et répartition

Etant donné $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $M : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ et une constante entière T , on imagine que l'on dispose de $1 + \sum_{t=1}^T b(t)$ corbeilles. On considère le jeu suivant : à chaque tour, le joueur va placer un certain nombre de points dans les corbeilles comme il le souhaite, tout en respectant la condition que lors des s derniers tours, il n'a pas positionné plus de $M(s)$ points. De plus, à chaque tour t , on retire $b(t)$ corbeilles (celles avec le plus grand poids). A la fin des T tours, on se retrouve donc avec une seule corbeille, et le but est de maximiser le poids dans cette corbeille. On veut montrer le résultat suivant :

Théorème 5. *Supposons que M est une fonction croissante avec $M(0) = 0$, et que pour tout s ,*

$$\sum_{t=s}^T b(t) \geq b(T) \left(\frac{T-s+1}{2} \right).$$

Alors le dernier poids dans la corbeille est au plus

$$\frac{2}{b(T)} \sum_{t=1}^T \frac{M(t) - M(t-1)}{t}$$

Démonstration. Remarquons d'abord que si le joueur pose w_i points au tour i dans une partie, alors à chaque tour, s'il démarre avec une moyenne de p points par corbeille dans les $1 + \sum_{t=i}^T b(t)$ corbeilles, alors à la fin du tour, la moyenne des poids parmi les $1 + \sum_{t=i}^T b(t)$ corbeilles est $p + \frac{w_i}{1 + \sum_{t=i}^T b(t)}$, une valeur qui n'augmente pas quand on retire les corbeilles. A la fin du jeu, il se retrouve donc avec un poids dans la dernière corbeille (qu'on peut interpréter comme la moyenne) de au plus $\sum_{i=1}^T \frac{w_i}{1 + \sum_{t=i}^T b(t)}$. Les $b(t)$ étant fixés, le joueur a intérêt à poser des points dans les corbeilles le plus tard possible. En introduisant $\Delta M(s) = M(s) - M(s-1)$ et en posant au plus $w_i = \Delta M(T - i + 1)$ à chaque tour, on obtient avec la majoration précédemment établie que le nombre de points dans la dernière corbeille est majoré par

$$\sum_{i=1}^T \frac{w_i}{1 + \sum_{t=i}^T b(t)} \leq \sum_{t=1}^T \frac{\Delta M(T - t + 1)}{\frac{1}{2}b(T)(T - t + 1) + 1} \leq \frac{2}{b(T)} \sum_{t=1}^T \frac{M(t) - M(t-1)}{t}.$$

□

6 Démonstration du Théorème 1

Nous avons à présent tous les outils en main pour démontrer notre résultat principal, Théorème 1. On fixe c, d, n comme dans les hypothèses et on considère le jeu de type (c, d, n) . On note τ_n le temps de victoire du constructeur.

On se donne $\epsilon > 0$. On dit que le destructeur réalise une ϵ -séparation d'une ligne s'il place des points de sorte qu'à la fin du tour, il n'y ait pas plus de ϵn points du constructeur sur tout segment actif. On remarque qu'une ϵ -séparation de toute ligne avec moins de n points du constructeur se fait en $\frac{2}{\epsilon}$ points au plus.

6.1 Réduction au jeu des corbeilles

Plaçons nous dans les bonnes conditions pour appliquer le Théorème 5. Puisque réduire $b(t)$ désavantage le destructeur, on peut supposer qu'on est dans les conditions d'application du Théorème 5 (tout en respectant les conditions du Théorème 1). On pose $\tilde{d}(t) = \frac{\epsilon d(t)}{4}$. La stratégie du destructeur sera donc la suivante : à chaque tour, le destructeur va ϵ -séparer les $\tilde{d}(t)$ segments actifs du constructeur contenant le plus de points. Par l'absurde, on suppose maintenant que le constructeur gagne en $T + 1$ et que $c(T + 1) \leq (1 - \epsilon)n$. On remarque que si le destructeur suit sa stratégie, on peut assimiler la partie à un jeu des corbeilles pondérées avec $M(s) = Szt(T^\alpha s, d(T)s + 1)$ qui est la borne donnée par le théorème de Szemerédi–Trotter. On considère que les corbeilles sont les segments actifs avec au moins $\epsilon \frac{n}{2}$ points du constructeur, et le poids dedans est le nombre de points sur le segment moins $\frac{\epsilon n}{2}$. Au vu de l'hypothèse sur $c(T + 1)$, le constructeur doit finir le jeu des corbeilles avec au moins $\epsilon \frac{n}{2}$ points dans la dernière corbeille. Il ne reste qu'à se convaincre que les paramètres du jeu des corbeilles donnés permettent de bien décrire le jeu d'origine : la borne sur M a été augmentée pour avantager le constructeur, ce qui permet de conclure en utilisant la croissance de c et la théorème de Szemerédi–Trotter (en effet, on remarque que le constructeur ne peut pas ajouter plus de $T^\alpha s$ points au cours des s derniers tours, et il y a au plus $b(\tilde{T})s$ segments actifs qui sont comptés dans le jeu, ce qui justifie le choix des bornes). Ainsi, le théorème 5 s'applique.

6.2 Conclusion de la preuve

On note à présent C la constante donnée par le théorème de Szemerédi–Trotter. On a augmenté encore la borne sur M pour utiliser la majoration du théorème de Szemerédi–Trotter. Le calcul [2] donne $\Delta M(s) = O((T^\alpha \tilde{d}(T))^{\frac{2}{3}} s^{\frac{1}{3}} + T^\alpha + \tilde{d}(T))$. Ainsi, le théorème 5 affirme que si on note Π le poids de la dernière corbeille, on a

$$\begin{aligned} \Pi &= O \left[\frac{1}{\tilde{d}(T)} (T^{(2\alpha+1)/3} \tilde{d}(T)^{2/3} + T^\alpha \log(T) + \tilde{d}(T) \log(T)) \right] \\ &= O \left[\frac{1}{d(T)} (T^{(2\alpha+1)/3} d(T)^{2/3} + T^\alpha \log(T) + d(T) \log(T)) \right]. \end{aligned}$$

Ainsi, si $\alpha \geq 1$, sachant $T^{(2\alpha+1)/3} \leq n$, et $\frac{d(T)}{\log(T)} \rightarrow 0$ on a $\Pi = o(n)$. De même si $\alpha < 1$ et $\frac{d(T)}{T^{1-\alpha}}$. Ainsi, cela contredit l'hypothèse que l'on a faite.

Ceci conclut la démonstration du Théorème 1.

7 Conclusion

Ainsi se conclut notre étude de ce jeu de type Constructeur Destructeur. Nous sommes parvenus à calculer le temps de victoire du destructeur quand n devient grand. Bien sûr, nous n'avons pas fait le tour de la question, et il serait possible de montrer par exemple sous certaines hypothèses que si d n'est pas trop grand, alors le constructeur gagne en temps $o(n)$.

Bibliographie

- [1] Thomas CHOMETTE. *Graphes planaires*. <http://cm2.ens.fr/math/pdf/combi/planaire.pdf>.

- [2] Joshua ERDE et Mark WALTERS. “An n-in-a-row Type Game”. In : *arXiv preprint arXiv :1501.01467* (2015).
- [3] János PACH et Géza TÓTH. “Graphs drawn with few crossings per edge”. In : *Combinatorica* 17.3 (1997), p. 427-439.
- [4] János PACH et al. “Improving the crossing lemma by finding more crossings in sparse graphs”. In : *Proceedings of the twentieth annual symposium on Computational geometry*. 2004, p. 68-75.
- [5] LÁSZLÓ A. SZÉKELY. “Crossing Numbers and Hard Erdős Problems in Discrete Geometry”. In : *Combinatorics, Probability and Computing* 6.3 (1997).
- [6] Terence TAO. *The crossing number inequality*. URL : <https://terrytao.wordpress.com/2007/09/18/the-crossing-number-inequality/>.
- [7] Marco VITTURI. *THE POLYNOMIAL METHOD LECTURE 2 SZEMERÉDI-TROTTER THEOREM AND POLYNOMIAL PARTITIONING*.

8 Amélioration du Théorème de Szemerédi-Trotter

Le Théorème de Szemerédi-Trotter nous donne une majoration satisfaisante, et elle est optimale en terme d'équivalent. On peut cependant s'interroger sur la valeur de la constante nécessaire pour avoir une inégalité à chaque fois. Dans [4], les auteurs s'intéressent à une amélioration de l'inégalité des croisements, dont la démonstration repose sur le théorème topologique de Jordan. Ils obtiennent le résultat suivant :

Théorème 6. *Pour tout graphe avec au moins 3 arêtes,*

$$cr(G) \geq 4|E| - \frac{103}{6}(|V| - 2).$$

Le même raisonnement probabiliste qu'en partie trois, avec $p = \frac{103}{16} \frac{|V|}{|E|}$, donne le résultat suivant.

Théorème 7. *Pour tout graphe G tel que $\frac{103}{16} \frac{|V|}{|E|} \leq 1$,*

$$cr(G) \geq \frac{1024}{31827} \frac{|E|^3}{|V|^2}.$$

Dans le cas général, on peut montrer que

$$cr(G) \geq \frac{1}{31.1} \frac{|E|^3}{|V|^2} - 1.06|V|$$

Le théorème 6 s'obtient à partir des deux théorèmes suivants, dont la démonstration ne sera pas donnée car reposant sur des notions topologiques trop poussées, mais détaillée en [4].

Théorème 8. *Soit G un graphe tel que $|V| \geq 3$, que l'on peut représenter dans le plan sans qu'une arête ne croise plus de 3 autres. Alors*

$$|E| \leq 5.5(|V| - 2)$$

Théorème 9. *Pour G un graphe avec plus de trois arêtes,*

$$cr(G) \geq \frac{7}{3}|E| - \frac{25}{3}(|V| - 2)$$

On en déduit le théorème 6 par le raisonnement suivant :

Démonstration. Remarquons que si G a au plus $5(|V| - 2)$ sommets, alors le résultat découle du théorème. Sinon, on va retirer les arêtes avec le plus de croisements pour retourner dans ce cas, et sommer les croisements qui restent avec ceux qu'on a retirés. Il est montré dans [3] que le nombre d'arêtes qui contribuent à moins de 2 croisements est majoré par $5(|V| - 2)$. Ainsi, chacune des arêtes retirée pendant le procédé a retiré au moins 3 croisements. De plus, le théorème 1 permet d'affirmer qu'à l'exception des $\frac{1}{2}(|V| - 2)$ dernières arêtes, toutes ont retiré au moins 4 croisements. On note G' le graphe ainsi obtenu. Lors de la transformation, on a donc retiré au moins $4(|E| - 5(|V| - 2)) - \frac{1}{2}(|V| - 2) = 4|E| - \frac{41}{2}(|V| - 2)$ croisements. Comme mentionné précédemment, l'application du Théorème 2 à G' donne $cr(G') \geq \frac{10}{3}(|V| - 2)$. On conclut en sommant les deux quantités. \square

On peut donc montrer le théorème suivant :

Théorème 10 (Théorème de Szemerédi–Trotter raffiné). *Si on se donne P un ensemble de points distincts, et L un ensemble de lignes distinctes, et on suppose que chaque ligne et point contribue aux incidences, alors en notant $I(P, L) = \{(p, l) \in P \times L \mid p \in l\}$, on a*

$$|I(P, L)| \leq 2.5|P|^{2/3}|L|^{2/3} + |P| + |L|. \quad (3)$$

Démonstration. On se donne les ensembles P et L tels que chaque point et ligne contribue aux incidences, et tel qu'il y a au moins 2 points, donc $|L| \geq |P| \geq 2$, et on construit un graphe G comme en partie 4. On majore ici $cr(G)$ non pas par $|L|^2$ mais par $\binom{|V|}{2}$.

On applique l'inégalité des croisements améliorée pour obtenir :

$$\binom{|V|}{2} \geq \frac{1}{1.31} \frac{(|I(P, L)| - |L|)^3}{|P|^2} - 1.06|P|$$

En réarrangeant comme en partie 4, on obtient

$$|I(P, L)| - |L| \geq \sqrt[3]{15.55}|P|^{2/3}|L|^{2/3} + |P|$$

ce qui donne finalement, car $|L| \geq |P| \geq 2$:

$$|I(P, L)| \leq 2.5|P|^{2/3}|L|^{2/3} + |P| + |L|$$

ce qui est bien le résultat demandé. \square

9 Annexe

Démonstration du lemme 1 :

Démonstration. On raisonne par récurrence forte sur le nombre de cycles élémentaires du graphe G . On note $H_n =$ "Pour tout graphe G connexe acyclique planaire contenant n cycles élémentaires, le lemme s'applique"

- Pour $n = 0$ le graphe est donc connexe acyclique, donc c'est un arbre par définition.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que H_0, \dots, H_n . Soit G un graphe contenant $n + 1$ cycles élémentaires. On choisit arbitrairement un des ces cycles. On retire une des arêtes qui le compose, donnant un graphe G' , ce qui va faire diminuer le nombre de cycle élémentaires d'au moins 1. Ainsi, l'hypothèse de récurrence s'applique, et le graphe G' peut s'obtenir via ajout successif d'arêtes depuis un arbre, puis en remarquant que G' est planaire, l'ajout de l'arête permet de construire G ce qui montre H_{n+1} \square

Démonstration du corollaire 2

Démonstration. Pour cela, on suppose qu'on a m droites contenant au moins k points. Cela donne $mk \leq |I(P, L)|$ donc en appliquant le théorème de Szemerédi–Trotter,

$$\begin{aligned} mk &= O\left(|P|^{2/3}|m|^{2/3} + |P| + m\right) \\ \Rightarrow m &= O\left(\frac{|P|^2}{k^3} + \frac{|P|}{k}\right) \end{aligned}$$

□