Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = X^k$.

Questions de cours

Soit α un réel.

1. Justifier que la famille $\mathcal{E} = (1, X - \alpha, ..., (X - \alpha)^n)$ est une base de E_n.

2. Soit P un polynôme de E_n.
Donner sans démonstration la décomposition de P dans la base $\mathcal{E}$ à l'aide des dérivées successives du polynôme P.

3. On suppose que α est une racine d'ordre $r \in [\![1, n]\!]$ de P.
Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^r$.

*****

À tout polynôme P de E_n, on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = X\,P(X) - \frac{1}{n}\,(X^2 - 1)\,P'(X)$$

et on note T l'application qui à P associe Q.

4. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Déterminer $T(P_k)$.

5. Montrer que T est un endomorphisme de E_n.

6. Écrire la matrice M de T dans la base $\mathscr{B} = (P_0, P_1, ..., P_n)$ de E_n.

7. On suppose que λ est une valeur propre réelle de l'endomorphisme T et soit P un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre λ.

7.1. Montrer que P est de degré n.

7.2. Soit z_0 une racine complexe de P d'ordre de multiplicité $r \in \mathbb{N}^*$. Prouver que $z_0^2 - 1 = 0$.

7.3. En déduire une expression de P.

8. Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme T.
L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Soit a et b deux réels avec $a > 0$. Choisir sans justification l'expression correcte de a^b :

$$(A) : \mathrm{e}^{b\,\ln(a)} \qquad (B) : \mathrm{e}^{a\,\ln(b)} \qquad (C) : \mathrm{e}^{\ln(a)\,\ln(b)}.$$

2. Soit x et y deux réels tels que $x < y$ et t un réel de $]0, 1[$.
   Comparer t^x et t^y.

3. Donner, sans démonstration, le développement en série entière de la fonction exponentielle réelle et donner son domaine de validité.

4. On considère la fonction Γ définie par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t$.

   On admet que cette fonction est définie sur $]0, +\infty[$ et que, pour tout réel x strictement positif :

$$\Gamma(x + 1) = x\,\Gamma(x).$$

   Calculer $\Gamma(1)$ et en déduire, en effectuant un raisonnement par récurrence, la valeur de $\Gamma(n + 1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

*****

5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, lorsque cela a un sens :

$$F(x) = \int_0^1 t^{t^x} \mathrm{d}t$$

   où, comme il est d'usage, $t^{t^x} = t^{(t^x)}$.

   5.1. Déterminer l'ensemble de définition de F.

   5.2. Déterminer le sens de variation de F.

   5.3. Démontrer que pour tout x réel positif, on a : $F(x) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

   5.4. Démontrer que F est continue sur son ensemble de définition.

   5.5. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} F(x)$.

   Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

   5.6. Dresser alors avec soin le tableau de variations de F et donner une allure générale de sa courbe représentative dans un repère orthonormal. On admettra que $F'(0) = \dfrac{1}{4}$ et on tracera la tangente au point d'abscisse $x = 0$.

6. Soit x un réel strictement positif.

   Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction définie sur $]0, 1]$ par $g_n(t) = \dfrac{t^{nx} \ln^n(t)}{n!}$.

   6.1. Démontrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge simplement sur $]0, 1]$ et donner sa somme.

   6.2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+1)}{(nx+1)^{n+1}}$.

   6.3. Établir enfin que l'on a :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(1+nx)^{n+1}}.$$

EXERCICE 3

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$.

1. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$.

2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.

3. Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.

4. Montrer que Ψ est un endomorphisme de E.

5. Surjectivité de Ψ

Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

5.1. Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

5.2. La fonction h est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

5.3. Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$.
Montrer que la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

5.4. A-t-on $h \in \mathrm{Im}(\Psi)$?

5.5. Conclure.

6. Montrer que Ψ est injective.

7. Recherche des éléments propres de Ψ

7.1. Justifier que 0 n'est pas valeur propre de Ψ.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{\mu}{x}\,y = 0.$$

7.2. Résoudre (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.

7.3. Déterminer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

7.4. Déterminer alors les valeurs propres de Ψ et les sous-espaces propres associés.

8. Soit $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{B}$.

8.1. On veut montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ est une base de F_n

Soit $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j = 0.$ $\quad (*)$

8.1.1. Montrer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.
On pourra simplifier l'expression $(*)$ par x lorsque x est non nul.

8.1.2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.
Démontrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

8.1.3. Conclure et déterminer la dimension de l'espace vectoriel F_n.

8.2. Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n

8.2.1. Soit $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et la calculer.

8.2.2. En déduire que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

8.3. Donner la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathcal{B}$.

8.4. Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n.

8.5. Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto z(x) = \begin{cases} \left(x + x^2\right)\ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

Après avoir vérifié que $z \in F_n$, déterminer $\Psi_n^{-1}(z)$.

EXERCICE 4

Question de cours

1. Rappeler la définition d'un évènement négligeable et d'un évènement presque sûr.

*****

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in]0, 1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k$.

2. Étude de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2.1. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

2.2. Démontrer que $\ell \in [0, 1[$.

2.3. Soit $q \in [0, 1[$. Montrer que si à partir d'un certain rang n_0, on a $u_n \leqslant q$, alors $\ell = 0$.

2.4. Que peut-on dire de ℓ si la suite (u_n) est décroissante ?

2.5. Déterminer la valeur de ℓ dans le cas où $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

3. On considère une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec :

- X_0 est constante et égale à 1,
- X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre u_1,
- pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit une loi de Bernoulli de telle sorte que :

$$\mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} = 1]) = 0 \text{ et } \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) = u_{n+1}.$$

3.1. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{P}([X_n = 1]) = p_n.$$

3.2. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

3.3. Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles les deux variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont indépendantes.

4. On suppose que $\ell = 0$

4.1. Soit deux entiers naturels non nuls m et n tels que $m < n$.
Montrer que la probabilité de l'évènement $[X_m = 0] \cap [X_{m+1} = 1] \cap ... \cap [X_n = 1]$ est nulle.

4.2. Quelle est la probabilité de l'évènement $\bigcap_{k=0}^{n} [X_k = 1]$?

4.3. En déduire que la probabilité de l'évènement $A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} [X_n = 1]$ est nulle.

4.4. On définit les variables aléatoires Y et Z par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \ Y(\omega) = \begin{cases} \text{Max}\,\{n \in \mathbb{N} \,/\, X_n(\omega) = 1\} & \text{s'il existe} \\ -1 \ \ \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \ Z(\omega) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega) & \text{si la série converge} \\ +\infty \ \ \text{sinon} \end{cases}.$$

Démontrer que $\mathbb{P}([Y \neq Z]) = 0$.
Que peut-on en conclure pour l'évènement $[Y = Z]$?

Éléments de correction

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel non nul. On note $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $P_k = X^k$.

Questions de cours

Soit α un réel.

1. La famille $\mathcal{E}$ est une famille de polynômes non nuls échelonnés en degré : elle est donc libre. De plus, elle est de cardinal $n + 1 = \dim(E_n)$. C'est donc une base de E_n.
2. C'est la formule de Taylor en α : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k$. Les composantes de P dans la base $\mathcal{E}$ sont donc $\left(P(\alpha), P'(\alpha), \ldots, \dfrac{P^{(n)}(\alpha)}{n!}\right)$.
3. Comme α est une racine d'ordre r de P, $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$. D'après la formule de Taylor : $P = \displaystyle\sum_{k=r}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(X-\alpha)^k = (X-\alpha)^r \sum_{k=0}^{n-r} \frac{P^{(k+r)}(\alpha)}{(k+r)!}(X-\alpha)^k$. Donc le reste de la division euclidienne de P par $(X-\alpha)^r$ et le polynôme nul et le quotient est $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-r} \frac{P^{(k+r)}(\alpha)}{(k+r)!}(X-\alpha)^k$.

******

À tout polynôme P de E_n, on associe le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = X\,P(X) - \frac{1}{n}\,(X^2-1)\,P'(X)$$

et on note T l'application qui à P associe Q.

4. $T(P_k) = X^{k+1} - \dfrac{k}{n}(X^2-1)X^{k-1}$. Si $k = 0$, on obtient $T(1) = X$ et si $0 < k < n$, $T(P_k) = \dfrac{n-k}{n}P_{k+1} + \dfrac{k}{n}P_{k-1}$, et si $k = n$, $T(X^n) = X^{n-1}$.
5. On vérifie que T est linéaire, puis on remarque que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $T(P_k) \in E_n$. Comme $(P_0, \ldots, P_n)$ est une base de E_n, les images des éléments de E_n par T sont dans E_n.
6. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/n & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 2/n & \ddots & \vdots \\ 0 & (n-1)/n & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/n & 0 \end{pmatrix}$.
7. On suppose que λ est une valeur propre réelle de l'endomorphisme T et soit P un polynôme unitaire, vecteur propre associé à la valeur propre λ.

7.1. Notons a le coefficient dominant de P. Alors le coefficient dominant de XP est encore a et celui de $\frac{1}{n}(X^2-1)P'$ est $\frac{\deg(P)}{n}a$. Donc, si $\deg(P) \neq n$, $\deg(T(P)) = \deg(P)+1$, donc P ne peut pas être un vecteur propre. Ainsi, $\deg(P) = n$.

7.2. Il existe $Q \in E_n$ tel que $P = (X-z_0)^r Q$ avec $Q(z_0) \neq 0$. Donc $P' = r(X-z_0)^{r-1}Q + (X-z_0)^r Q' = (X-z_0)^{r-1}(rQ + (X-z_0)Q')$. En posant $R = (rQ + (X-z_0)Q')$, on remarque que $R(z_0) \neq 0$. De plus, $\lambda P - XP = \frac{1}{n}(X^2-1)P'$, donc $(\lambda - X)(X-z_0)Q = \frac{1}{n}(X^2-1)R$. En évaluant en z_0, on obtient $0 = z_0^2 - 1$.

7.3. D'après la question précédente, il existe $\alpha \in [\![0,n]\!]$ tel que $P = (X-1)^\alpha (X+1)^{n-\alpha}$.

8. D'après la question précédente, les vecteurs propres unitaires de T sont de la forme $P = (X-1)^\alpha(X+1)^{n-\alpha}$. Alors $T(P) = X(X-1)^\alpha(X+1)^{n-\alpha} - \frac{1}{n}(X^2-1)\left(\alpha(X-1)^{\alpha-1}(X+1)^{n-\alpha} + (n-\alpha)(X-1)^\alpha(X+1)^{n-\alpha-1}\right) = (X-1)^\alpha(X+1)^{n-\alpha}\left(X - \frac{\alpha}{n}(X+1) - \frac{n-\alpha}{n}(X-1)\right) = \left(1 - \frac{2\alpha}{n}\right)P$. Ainsi, les valeurs propres de T sont les $1 - \frac{2\alpha}{n}$, pour $\alpha \in [\![0,n]\!]$, avec $P = (X-1)^\alpha(X+1)^\alpha$ comme vecteur propre associé.
T est diagonalisable car il a $n+1 = \dim(E_n)$ valeurs propres distinctes.

EXERCICE 2

Questions de cours

1. Réponse (A) : $\mathrm{e}^{b\ln(a)}$.

2. Comme $\ln(t) < 0$, $x\ln(t) > y\ln(t)$, donc $t^x = \mathrm{e}^{x\ln(t)} > \mathrm{e}^{y\ln(t)} = t^y$.

3. Pout tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

4. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -[\mathrm{e}^{-t}]_0^{+\infty} = 1$.
Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\Gamma(n+1) = n!$. L'initialisation est déjà faite. Prenons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\Gamma(n+1) = n!$. Alors $\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n!$ par hypothèse de récurrence. Donc $\Gamma(n+2) = (n+1)!$. On conclut alors par récurrence.

******

5. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note, lorsque cela a un sens :

$$F(x) = \int_0^1 t^{t^x}\,\mathrm{d}t,$$

où, comme il est d'usage, $t^{t^x} = t^{(t^x)}$.

5.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $f : t \mapsto t^{t^x} = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{x\ln(t)}\ln(t)}$ est continue sur $]0,1]$. Lorsque $x < 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} x\ln(t) = +\infty$, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln(t)}\ln(t) = -\infty$ et la fonction f se prolonge par continuité en 0 par 0. Lorsque $x \geqslant 0$, $\lim\limits_{t\to 0^+} x\ln(t) = -\infty$, donc $\lim\limits_{t\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln(t)}\ln(t) = 0$ par croissances comparées. Donc la fonction f se prolonge encore en 0 par 1.
Ainsi, la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

5.2. Soit $x < y$ deux réels. D'après les questions de cours, pour tout $t \in]0,1[$, $t^x > t^y$, donc $t^{t^x} < t^{t^y}$. En intégrant, on obtient $F(x) \leqslant F(y)$, donc F est croissante sur $\mathbb{R}$.

5.3. On remarque que $F(0) = \displaystyle\int_0^1 t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Comme F est croissante sur $\mathbb{R}$, pour tout $x \geqslant 0$, $F(x) \geqslant F(0) = \dfrac{1}{2}$.

5.4. Pour tout $t \in]0,1]$, la fonction $x \mapsto t^{t^x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $t \in]0,1]$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $t^{t^x} \leqslant 1$ qui est intégrable sur $[0,1]$. D'après le théorème de continuité sous l'intégrale, la fonction F est continue sur $\mathbb{R}$.

5.5. Pour tout $t \in]0,1]$, $\lim\limits_{x\to+\infty} t^{t^x} = 1$, la fonction $t \mapsto 1$ est continue sur $]0,1]$ et la domination de la question précédente s'applique encore. D'après le théorème de convergence dominée, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \displaystyle\int_0^1 1\mathrm{d}t = 1$. De même, comme pour tout $t \in]0,1]$, $\lim\limits_{x\to-\infty} t^{t^x} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$.

5.6. A faire ! Dresser alors avec soin le tableau de variations de F et donner une allure générale de sa courbe représentative dans un repère orthonormal. On admettra que $F'(0) = \dfrac{1}{4}$ et on tracera la tangente au point d'abscisse $x = 0$.

6. Soit x un réel strictement positif.

Pour tout entier naturel n, on note g_n la fonction définie sur $]0,1]$ par $g_n(t) = \dfrac{t^{nx}\ln^n(t)}{n!}$.

6.1. Soit $t \in]0,1]$. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} g_n(t)$ est une série exponentielle qui converge vers $\mathrm{e}^{t^x\ln(t)} = t^{t^x}$. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction $t \mapsto t^{t^x}$.

6.2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On peut faire des intégrations par parties successives, ou bien on effectue le changement de variable C^1 bijectif $u = -\ln(t)$, de sorte que $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\mathrm{d}t = -\frac{1}{n!}\int_{+\infty}^0 \mathrm{e}^{-nux}\,|(-u)^n|\,\mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u(nx+1)}\,u^n\mathrm{d}t$, puis le changement $v = u(nx+1)$,

pour obtenir $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-v}\,\frac{v^n}{(nx+1)^{n+1}}\mathrm{d}t$. Cette dernière intégrale étant convergente, celle d'origine l'était aussi et de plus, $\displaystyle\int_0^1 |g_n(t)|\mathrm{d}t = \frac{1}{n!}\frac{\Gamma(n+1)}{(nx+1)^{n+1}} = \frac{1}{(nx+1)^{n+1}}$.

6.3. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n$ converge simplement vers $t \mapsto t^{t^x}$ qui est continue sur $]0,1]$. De plus, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\int_0^1 |g_n(t)|\mathrm{d}t = \sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(nx+1)^{n+1}}$ converge car c'est une série à termes positifs de terme général $\dfrac{1}{(nx+1)^{n+1}} = o(1/n^2)$. On peut donc intervertir la somme et l'intégrale : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 t^{t^x}\mathrm{d}t = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} g_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 |g_n(t)|\mathrm{d}t$. Or, pour tout $t \in]0,1]$, $|g_n(t)| = (-1)^n g_n(t)$ car $\ln(t) < 0$. Donc $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(nx+1)^{n+1}}$.

EXERCICE 3

On note E l'espace vectoriel des fonctions à valeurs réelles continues sur $\mathbb{R}_+$.
Pour tout élément f de E et tout $x \in \mathbb{R}_+$ on pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$.

1. Justifier que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et donner pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ l'expression de $F'(x)$.

Soit $\Psi : f \in E \mapsto \Psi(f)$ définie par : $\forall\ x \in \mathbb{R}_+,\ \Psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t$.

2. Exprimer, pour tout réel x strictement positif, $\Psi(f)(x)$ à l'aide de $F(x)$.

3. Justifier que la fonction $\Psi(f)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et donner la valeur de $\Psi(f)(0)$.

4. Montrer que Ψ est un endomorphisme de E.

5. Surjectivité de Ψ

Soit $h : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto h(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$

5.1. Montrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

5.2. Est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$?

5.3. Soit $g \in \mathrm{Im}(\Psi)$.
Montrer que la fonction $x \mapsto x\,g(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

5.4. A-t-on $h \in \mathrm{Im}(\Psi)$?

5.5. Conclure.

6. Montrer que Ψ est injective.

7. Recherche des éléments propres de Ψ

7.1. Justifier que 0 n'est pas valeur propre de Ψ.

Soit $\mu \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle (L) sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$y' + \frac{\mu}{x} y = 0$$

7.2. Résoudre (L) sur $\mathbb{R}_+^*$.

7.3. Déterminer les solutions de (L) prolongeables par continuité sur $\mathbb{R}_+$.

7.4. Déterminer alors les valeurs propres de Ψ et les sous-espaces propres associés.

8. Soit $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on pose :

$$f_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f_i(x) = x^i \text{ et } g_i : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto g_i(x) = \begin{cases} x^i \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$$

On note $\mathscr{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ et F_n le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathscr{B}$.

8.1. On veut montrer que la famille $\mathcal{B} = (f_1, ..., f_n, g_1, ..., g_n)$ est une base de F_n

Soient $(\alpha_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et $(\beta_j)_{j\in[\![1,n]\!]}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j g_j = 0 \ (*)$.

8.1.1. Montrer que $\alpha_1 = \beta_1 = 0$.
On pourra simplifier l'expression $(*)$ par x lorsque x est non nul.

8.1.2. Soit $p \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0$.
Démontrer que $\alpha_{p+1} = \beta_{p+1} = 0$.

8.1.3. Conclure.

8.2. Où l'on démontre que Ψ induit un endomorphisme sur F_n

8.2.1. Soient $x > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^x t^p \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et la calculer.

8.2.2. En déduire que Ψ induit un endomorphisme Ψ_n sur F_n.

8.3. Donner la matrice de l'application Ψ_n dans la base $\mathcal{B}$.

8.4. Démontrer que Ψ_n est un automorphisme de F_n.

8.5. Soit $z : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto z(x) = \begin{cases} (x + x^2) \ln(x) & \text{pour } x > 0 \\ 0 & \text{pour } x = 0 \end{cases}$.

Après avoir vérifié que $z \in F_n$, déterminer $\Psi_n^{-1}(z)$.

EXERCICE 4

Question de cours

1. Rappeler la définition d'un évènement négligeable et d'un évènement presque sûr.

******

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n \in]0, 1[$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $p_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n} u_k$.

2. Étude de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2.1. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

2.2. Démontrer que $\ell \in [0, 1[$.

2.3. Soit $q \in [0, 1[$. Montrer que si à partir d'un certain rang n_0, on a $u_n \leqslant q$, alors $\ell = 0$.

2.4. Que peut-on dire de ℓ si la suite (u_n) est décroissante ?

2.5. Déterminer la valeur de ℓ dans le cas où $u_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

3. On considère une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec :

- X_0 est constante égale à 1,
- X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre u_1,
- pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit une loi de Bernoulli de telle sorte que :

$$\mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} = 1]) = 0 \text{ et } \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) = u_{n+1}$$

3.1. Démontrer par récurrence sur l'entier naturel n que l'on a :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ \mathbb{P}([X_n = 1]) = p_n$$

3.2. En déduire l'espérance $\mathbb{E}(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

3.3. Déterminer les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles les deux variables aléatoires X_n et X_{n+1} sont indépendantes.

4. On suppose que $\ell = 0$

4.1. Soient deux entiers naturels non nuls n et m tels que $m < n$.
Montrer que la probabilité de l'évènement $[X_m = 0] \cap [X_{m+1} = 1] \cap \ldots \cap [X_n = 1]$ est nulle.

4.2. Quelle est la probabilité de l'évènement $\displaystyle\bigcap_{k=0}^{n}[X_k = 1]$?

4.3. En déduire que la probabilité de l'évènement $A = \displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[X_n = 1]$ est nulle.

4.4. On définit les variables aléatoires Y et Z par :

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} \text{Max}\,\{n \in \mathbb{N} \,/\, X_n(\omega) = 1\} & \text{s'il existe} \\ -1 \ \ \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\forall\, \omega \in \Omega,\ \ Z(\omega) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} X_k(\omega) & \text{si la série converge} \\ +\infty \ \ \text{sinon} \end{cases}$$

Démontrer que $\mathbb{P}([Y \neq Z]) = 0$.
Que peut-on en conclure pour l'évènement $[Y = Z]$?

1.

1.1. Si $p_n \neq 0$, alors $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1} < 1$ et donc, pour tout entier naturel n, $0 \leqslant p_{n+1} \leqslant p_n$, ce qui prouve que la suite (p_n) est décroissante et minorée : elle converge vers une limite ℓ telle que : $0 \leqslant \ell \leqslant u_1 < 1$.

1.2. On suppose donc qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geqslant N$, $u_n \leqslant k$.
Alors, pour $n \geqslant N$, on a : $p_n \leqslant k^{n-N}\, u_N \leqslant k^{n-N}$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Il en résulte donc que $\ell = 0$.

1.3. Si la suite (u_n) est décroissante, alors pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n \leqslant u_1 < 1$ et d'après la question précédente, $\ell = 0$.

1.4. On a $\ln(p_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \ln(u_k)$.
On cherche donc une suite (u_n) telle que la série de terme général $\ln(u_n)$ converge avec $u_n \in\,]0, 1[$.
Dans ce cas, la limite de $p_n = \mathrm{e}^{\ln(pn)}$ sera non nulle.
On peut prendre par exemple $u_n = \mathrm{e}^{-1/n^2}$.

2. On considère une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec :
- X_0 est constante égale à 1
- X_1 suit la loi de Bernoulli de paramètre u_1,
- pour tout $n \geqslant 1$, X_n suit une loi de Bernoulli de telle sorte que :

$$\mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} = 1]) = 0 \;\text{ et }\; \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1]) = u_{n+1}$$

2.1. On montre par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_n = 1]) = p_n$.
C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ puisque $u_0 = p_0 = 1$ et $u_1 = p_1$.
Soit donc $n \in \mathbb{N}$ et supposons la propriété vérifiée à ce rang n. On démontre qu'elle est encore vérifiée au rang $n + 1$.
$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \mathbb{P}_{[X_n=0]}([X_{n+1} = 1)\,\mathbb{P}([X_n = 0]) + \mathbb{P}_{[X_n=1]}([X_{n+1} = 1)\,\mathbb{P}([X_n = 1]) = u_{n+1}\, p_n + 0 = p_{n+1}$.
On a donc bien démontré que $\forall\, n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}([X_n = 1]) = p_n$.
On en déduit que $\mathbb{E}(X_n) = p_n$.

2.2. Si $m > n > 0$, on a : $\mathbb{P}([X_m = 1])\,\mathbb{P}([X_n = 1]) = p_m\, p_n \neq \mathbb{P}([X_m = 1] \cap [X_n = 1]) = \mathbb{P}([X_m = 1]) = p_m$ et donc, les variables aléatoires X_n, $n \in \mathbb{N}$ ne sont pas indépendantes.

3. On suppose que $\ell = 0$.

3.1. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}\left(\displaystyle\bigcap_{k=0}^{n} [X_k = 1]\right) = p_n$ qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
Le théorème de la limite monotone permet de conclure que $\mathbb{P}(A) = 0$.

3.2. On définit la variable aléatoire Y définie par : $\forall\, \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \underset{n\in\mathbb{N}}{\mathrm{Max}}(X_n(\omega) = 1)$ s'il existe et -1 sinon.
On vient de prouver que $\mathbb{P}([Y = -1]) = 0$ et donc, on presque partout $Y = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} X_n$.
L'espérance de Y est donc, si elle existe : $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n$.

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

On peut reprendre ici beaucoup de remarques faites l'an dernier dans le rapport MP :
- Les correcteurs ont signalé à plusieurs reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, raturées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.
Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent.
Notons que nous avons rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.
Rappelons aussi que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.
- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » etc... : rappelons que toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.
- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , il faut les vérifier !
- Enfin, un exemple ne permet pas de démontrer un résultat général.

Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire MPI.
- Signalons qu'une lecture attentive de la totalité du sujet permet souvent de comprendre l'architecture de chaque exercice et la démarche proposée dans chaque exercice.
Il nous a semblé en effet que beaucoup de candidats lisent de plus en plus approximativement l'énoncé, ce qui induit nombre d'erreurs facilement évitables : « donner sans démonstration » donne lieu à une démonstration, « démontrer par récurrence » ne donne pas lieu à une récurrence, la donnée $F'(0) = \dfrac{1}{4}$ se transforme en $F(0) = \dfrac{1}{4}$ etc...
- Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de MP et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
- Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés.
De plus, trop de candidats ne manipulent pas correctement les quantificateurs, ce qui entraîne de grosses difficultés dans les démonstrations, voire des contradictions.
- Dans le même type d'erreurs, on constate une grande confusion dans beaucoup de copies entre variable et paramètre : cela occasionne de grosses erreurs en particulier dans les intégrales à paramètre. Il est par ailleurs curieux de voir des candidats chercher un équivalent de la fonction à intégrer au voisinage de $+\infty$ alors que l'on intègre entre 0 et 1 !

- Enfin, notons une nouvelle fois que les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé.
- Reste à signaler que les probabilités génèrent un refus de beaucoup de candidats : près de 30% des candidats n'abordent pas cet exercice : rappelons que nous posons systématiquement un exercice de probabilité.

Conclusion : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés de la rigueur, une rédaction claire et lisible et une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.
Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.
Nous proposons chaque année dans ce rapport une correction détaillée du sujet et invitons vivement les candidats à l'étudier attentivement.

• Commentaires par exercices

• Exercice 1.
Beaucoup de candidats ont du mal pour compter de 0 à n mais comme ils ne connaissent pas la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$, les erreurs se compensent...Apparaît souvent la dimension d'une famille de vecteurs ! (confusion entre dimension et cardinal).
La formule de Taylor pour les polynômes est ignorée par plus d'un candidat sur deux.
Dans la question **3**. il est loin d'être évident pour nombre de candidats que $R = 0$.
Curieusement, la question **4.** a posé problème : des termes disparaissent lors du développement des parenthèses. Le cas $k = 0$ est trop souvent oublié.
Trop de candidats oublient de considérer la loi externe pour montrer qu'une application est linéaire. Certains tentent d'utiliser le calcul de $T(P_k)$ pour démontrer que $T(E_n) \subset E_n$ en oubliant de préciser que la famille (P_k) est une base de E_n.
La matrice demandée à la question **6.** est souvent fausse après de nombreux essais raturés : rappelons que la copie rendue n'est pas un brouillon !
Les questions **7.** et **8.** sont rarement abordées.

• Exercice 2.
Globalement, des négligences dans les écritures rendent les affirmations insensées. Citons par exemple : « t^{t^x} est continue » ; « t^{t^x} est croissante »

1. Question traitée par tous les candidats.
2. Question résolue souvent sans explication.
3. Il est désolant de constater que cette question est souvent fausse souvent en ce qui concerne le domaine de validité.

4. Il est surprenant d'obtenir assez souvent $\Gamma(1) = -1$ ou $\Gamma(1) = 0$...
On lit trop souvent « par une récurrence immédiate » ...
Certains candidats ne lisent pas correctement l'énoncé et redémontrent que la fonction Γ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $\forall\, x > 0, \Gamma(x+1) = \Gamma(x)$, ce qui n'est pas demandé, sans traiter la fin de la question.

5.

5.1. Question très souvent mal traitée (plus d'un candidat sur deux) : on lit que la définition de F découle de la continuité de t^{t^x} sur le segment $[0, 1]$.
Pour certains candidats, l'intégrale est définie si, et seulement si, l'intégrande est défini...
Avant d'étudier l'intégrabilité d'une fonction, il serait judicieux de s'interroger d'abord sur quel ensemble elle est continue (ou continue par morceaux) : cela peut éviter des études inutiles.

5.2. Question souvent bien traitée : certains cependant tentent de démontrer que F est C^1 sur son ensemble de définition : une lecture attentive de l'énoncé aurait permis d'éviter cette piste.
Ne pas oublier que le signe de $F(x+1) - F(x)$ ne permet pas de conclure quand au sens de variation de F.

5.3. Correctement traitée en général.

5.4. Correctement traitée en général.

5.5. Noter que la domination sur un segment ne fonctionne pas dans cette question.

5.6. Trop peu de candidats se risquent à donner une allure de la courbe représentative de F : c'est dommage.

6. Questions très rarement abordée.
Rappelons que la dérivée de $|g_n|$ n'est pas $|g_n'|$!

• **Exercice 3**.

1. Réponses catastrophiques à cette question que l'on pose à peu près tous les ans...
On cite le Théorème fondamental de l'analyse sans plus de précision et le calcul de $F'(x)$ reste loufoque...

2. Trop de candidats n'arrivent pas à mettre en oeuvre correctement le changement de variable $u = xt$ et obtiennent des résultats faux : $\Psi(f)(x) = x\,F(x)$ voire $\Psi(f)(1) = F(x)$!

3. Très rarement traitée : beaucoup de candidats n'ont pas vu l'intérêt de la question **2.**

4. Pas de problème.

5.

5.1. Nombre de candidats « prolongent » la fonction h par continuité en 0 !
Encore une fois, une lecture attentive de l'énoncé évite une telle erreur.

5.2. Il est surprenant de constater que pour beaucoup d'étudiants, h de classe C^1 en 0 signifie que h' tend vers 0 (!), sans s'assurer que $h'(0)$ existe et vaut 0.

5.3. Les questions **5.2** à **5.5** sont rarement abordées et $\lim\limits_{x \to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donne lieu à des résultats surprenants.

6. Les erreurs les plus courantes :
   - $\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t = 0 \Longrightarrow f = 0$ car $f \geqslant 0$
   - f est continue d'intégrale nulle, donc f est nulle.
   - Puisque Ψ n'est pas surjective elle ne peut être injective
7.
   7.1. Pas de problème.

   7.2. Question souvent mal traitée : des candidats ne mentionnent que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^{\mu}}$ et d'autres semblent perturbés par les variables et donnent comme solution les $y : t \mapsto \exp\left(-\dfrac{\mu\, t}{x}\right)$.

   7.3. et **7.4.** peu abordées et sans beaucoup de succès.
8. Question incomprise par 99% des candidats pour qui **8.1.1.** est le cas $n = 1$. Ainsi, en **8.1.2.**, ils disent : « de même qu'en **8.1.1.** » ...
   Le reste des sous-questions est très rarement abordé.

• **Exercice 4**.

On lit souvent que l'évènement A est négligeable lorsque $\mathbb{P}(A)$ tend vers 0 ou est très petit...
Pour de nombreux étudiants, $\dfrac{p_{n+1}}{p_n} = u_{n+1} < 1$ implique la décroissance de la suite (p_n) sans examen du signe de p_n.
On lit aussi : la suite (p_n) est décroissante et majorée et donc elle converge !
La question **2.5.** est rarement exacte : 1 % des candidats trouvent le bon résultat.
La question **3.** est souvent abordée mais son traitement n'est pas toujours rigoureux.
La question **4.** est rarement abordée.

Luc VALETTE

FIN