Les calculatrices sont interdites.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles.
On note, pour $f \in E$, $N_0(f) = \sup_{\mathbb{R}}|f|$.

Questions de cours

1. Rappeler l'ensemble de définition, la parité, l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de la fonction $x \mapsto \arctan(x)$.

2. En déduire le tableau des variations de la fonction arctan ainsi que l'allure de sa courbe représentative dans un repère orthonormal en faisant apparaître sa tangente en 0 et ses éventuelles asymptotes.

3. Justifier que arctan est élément de E et donner $N_0(\arctan)$.

4. Soit v une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Calculer la dérivée de la fonction $t \mapsto \arctan(v(t))$.
On rappelle que la dérivée de la composée de deux fonctions u et v dérivables est la fonction définie par $(u \circ v)'(x) = v'(x) \times u'(v(x))$ *sur un intervalle correctement choisi.*

5. Déterminer une expression simple de la fonction : $t \mapsto \arctan(t) + \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right)$.

*****

6. Soit f une fonction de E.

6.1. Montrer que pour tout x réel, la fonction $t \mapsto \arctan(tx) \times \dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

6.2. On pose, pour tout réel x :

$$\Phi(f)(x) = \int_0^{+\infty} \arctan(tx) \times \frac{f(t)}{1+t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Montrer que $\Phi(f)$ appartient à E.

6.3. Montrer que l'on peut se restreindre à l'intervalle $[0, +\infty[$ pour l'étude de la fonction $\Phi(f)$.

7. Montrer que l'on définit ainsi un endomorphisme Φ de E.

8. Montrer que pour tout $f \in E$, $\Phi(f)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

9. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de E qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction h.

9.1. Justifier que h est continue sur $\mathbb{R}$.

9.2. Montrer que h appartient à E.

10. Soit f_0 la fonction constante égale à 1 et $g = \Phi(f_0)$.

10.1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
Les théorèmes utilisés seront cités avec précision et on s'assurera que leurs hypothèses sont bien vérifiées.

10.2. Pour tout réel x strictement positif, exprimer $g'(x)$ sous forme intégrale.

10.3. Pour tout réel x de $]0, +\infty[$, simplifier l'expression : $g(x) + g\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

10.4. Une autre expression de g′

10.4.1. On fixe x, réel de $]0,1[\cup]1,+\infty[$.

Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $F(T) = \dfrac{1}{(1+x^2T)(1+T)}$.

10.4.2. Montrer que sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, $g'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

10.4.3. Donner alors l'expression de g' sur $]0,+\infty[$.

10.5. Donner le tableau des variations et l'allure de la courbe représentative de g sur $\mathbb{R}$.
On précisera ses éventuelles asymptotes et son comportement au voisinage de 0.

EXERCICE 2

Notations pour l'exercice :

- i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $\mathrm{i}^2 = -1$.
- Pour tout entier naturel non nul n, on notera $E_n = \mathbb{C}_n[X]$, le $\mathbb{C}$−espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à n.
- $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Questions préliminaires

1. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On note $g = \mathrm{Re}(f)$ et $h = \mathrm{Im}(f)$ ainsi $f = g + \mathrm{i}h$.
Montrer que $\overline{\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$.

2. Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On suppose que l'on a : $\forall z \in \mathbb{U},\ P(z) = 0$.
Justifier que P est le polynôme nul.

3. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, montrer que $z \in \mathbb{U}$ si et seulement si $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

4. Soient $P = 1 + \mathrm{i}X$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}$.

5. Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que la trace de la matrice A est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité.

*****

Soit n un entier naturel non nul.

6. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E_n, on pose :

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\, Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{d}\theta.$$

6.1. Soient k et ℓ deux entiers naturels de $[\![0,n]\!]$. Évaluer $\varphi(X^k, X^\ell)$.

6.2. Soient $a \in \mathbb{C}$ et P, Q, R trois éléments de E_n. Montrer que l'on a :

- $\varphi(aP+Q,R) = \overline{a}\,\varphi(P,R) + \varphi(Q,R)$
- $\varphi(P,aQ+R) = a\,\varphi(P,Q) + \varphi(P,R)$
- $\varphi(Q,P) = \overline{\varphi(P,Q)}$.

6.3. Soit $P \in E_n$. Montrer que $\varphi(P,P)$ est un réel positif ou nul.

6.4. Soit $P \in E_n$. Prouver l'équivalence : $\varphi(P,P) = 0 \iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

6.5. Soit Q_0 un polynôme de E_n avec $Q_0 = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On note $M = \sup_{z\in\mathbb{U}} |Q_0(z)|^2$.

6.5.1. Calculer $\varphi(Q_0,Q_0)$ à l'aide des coefficients de Q_0.
*On pourra utiliser les questions **6.2** et **6.1**.*

6.5.2. Démontrer que $M \geqslant 1$.

6.5.3. Prouver que $M = 1$ si, et seulement si, $Q_0 = X^n$.

EXERCICE 3

Question de cours

1. Soit $(u)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ où $a \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$.

1.1. Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_n en fonction de n, de a, de b et de u_1.

1.2. Préciser le comportement de u à l'infini.

*****

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
Un joueur lance successivement et de façon indépendante n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N.
Chaque boule a la probabilité $\frac{1}{N}$ de tomber dans chacune des N cases.
On cherche à étudier la variable aléatoire T_n égale au nombre de cases non vides après n lancers.

2. Déterminer en fonction de n et de N les valeurs que peut prendre T_n.

3. Donner les lois de T_1 et de T_2.

Pour la suite, on prendra $n \geq 2$.

4. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}(T_n = 1)$ et $\mathbb{P}(T_n = 2)$.

5. Calculer $\mathbb{P}(T_n = n)$.
On pourra distinguer les cas $n \leqslant N$ et $n > N$.

6. Prouver que, pour tout k appartenant à $[\![1,n]\!]$ on a :

$$\mathbb{P}(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N}\,\mathbb{P}(T_n = k) + \frac{N-k+1}{N}\,\mathbb{P}(T_n = k-1).$$

7. On considère dans cette question la fonction génératrice :

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k)\, x^k.$$

7.1. Montrer que $G_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(T_n = k)\, x^k$.

7.2. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$G_{n+1}(x) = \frac{1}{N}\left(x - x^2\right) G_n'(x) + x\, G_n(x).$$

7.3. En dérivant l'expression précédente, démontrer que :

$$\mathbb{E}(T_{n+1}) = \left(1 - \frac{1}{N}\right) \mathbb{E}(T_n) + 1.$$

7.4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}(T_n)$ et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.

7.5. Retrouver le résultat directement avec les variables aléatoires $X_i = 1$ si la $i$ème case est pleine, 0 sinon.

EXERCICE 4

Soient n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On dit que A est équitable si :

$$\forall (i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3, a_{ij} = a_{ik} a_{kj}.$$

1. Donner deux exemples de matrices équitables pour $n = 3$.

2. Déterminer l'ensemble des matrices A pour lesquelles : A est équitable et $-A$ est équitable.

3. Montrer que si A est équitable, alors sa transposée $A^\top$ est aussi équitable.

4. On suppose que A est équitable, montrer que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2, a_{ii} = a_{jj}$.

On suppose désormais que A est une matrice équitable non nulle.

5. Soit $k \in [\![1, n]\!]$, calculer a_{kk}.

6. Soit B une matrice équitable non nulle. Montrer que $A + B$ n'est pas équitable.

7. Montrer que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} \neq 0$.

8. Pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, exprimer a_{ij} à l'aide de a_{i1} et a_{j1}.

9. Quelques résultats remarquables

9.1. Montrer que A est de rang 1.

9.2. Calculer A^2.

9.3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

9.4. Montrer que la matrice A est semblable à $\mathrm{diag}(n, 0, \dots, 0)$.

9.5. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1.

10. Démontrer que A est symétrique si, et seulement si, A est à coefficients dans $\{-1, 1\}$.

11. Déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables symétriques non nulles.

12. Si G est un sous-groupe fini de $(\mathbb{K}^*, \times)$, déterminer le cardinal de l'ensemble des matrices équitables à coefficients dans G.

13. Déterminer toutes les matrices carrées équitables de taille 2 à coefficients dans le groupe $\mathbb{U}_2$.

FIN DU SUJET

ÉLÉMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 1

1. La fonction arctan est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. De plus, elle est impaire.

2. La fonction arctan est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x$. Enfin, sa courbe représentative admet deux asymptotes horizontales $y = \pm\dfrac{\pi}{2}$ en $\pm\infty$.

3. D'après les questions précédentes, arctan est continue sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\arctan(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. Donc $\arctan \in E$. De plus $N_0(\arctan) = \dfrac{\pi}{2}$.

4. La fonction $g : t \mapsto \arctan(v(t))$ est dérivable sur I par composition et pour tout $t \in I$, $g'(t) = \dfrac{v'(t)}{1+v(t)^2}$.

5. La fonction $h : x \mapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $h'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$. Donc h est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. De plus, $h(1) = \dfrac{\pi}{2}$ et $h(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

6. **6.1.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Déjà, $t \mapsto \arctan(tx)\dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$ par opérations.

De plus, $\forall t \in \left[0, +\infty\right[, 0 \leqslant \left|\arctan(tx)\dfrac{f(t)}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2}N_0(f)\dfrac{1}{1+t^2}$. Comme une primitive de $t \mapsto$

$\dfrac{1}{1+t^2}$ est arctan qui admet une limite en $+\infty$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$ converge. Ainsi, $t \mapsto \arctan(tx)\dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.

6.2. D'après la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\Phi(f)(x)| \leqslant \dfrac{\pi^2}{4} N_0(f)$, donc $\Phi(f)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \arctan(tx)\dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est continue et intégrable sur $[0,+\infty[$ (cf question précédente).
- Pour tout $t \in [0,+\infty[$, $x \mapsto \arctan(tx)\dfrac{f(t)}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- $\forall (t,x) \in [0,+\infty[\times\mathbb{R}$, $0 \leqslant \left|\arctan(tx)\dfrac{f(t)}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2} N_0(f)\dfrac{1}{1+t^2}$.

Les théorèmes de continuité des intégrales à paramètres nous permettent de conclure que $\Phi(f) \in E$.

6.3. La fonction $\Phi(f)$ est impaire par imparité de la fonction arctan. Il suffit donc de l'étudier sur $[0,+\infty[$.

7. Φ est clairement linéaire et définie sur E. D'après la question **6.2.**, Φ est bien un endomorphisme de E.

8. On applique le théorème de dérivation des intégrales à paramètres : on note $h : (x,t) \mapsto \arctan(tx)\dfrac{f(t)}{1+t^2}$ et on fixe $x_0 > 0$.

- Pour tout $t \in [0,+\infty[$, $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $[x_0,+\infty[$.
- Pour tout $x \in [x_0,+\infty[$, $t \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $x \in [x_0,+\infty[$, $t \mapsto \dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $(x,t) \in [x_0,+\infty[\times[0,+\infty[$, $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| = \left|\dfrac{tf(t)}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\right| \leq \dfrac{tN_0(f)}{(1+t^2x_0^2)(1+t^2)}$, et $t \mapsto \dfrac{tN_0(f)}{(1+t^2x_0^2)(1+t^2)}$ continue sur $[0,+\infty[$ et intégrable sur $[0,+\infty[$

Donc $\Phi(f)$ est de classe C^1 sur $[x_0,+\infty[$ et par caractère local sur $]0,+\infty[$.

9. **9.1.** La fonction h est la limite uniforme d'une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, et est donc continue sur $\mathbb{R}$.

9.2. Par définition de la convergence uniforme, la fonction $h - h_0$ est bornée sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|h(x)| \leqslant |h(x)-h_0(x)| + |h_0(x)| \leqslant N_0(h-h_0) + N_0(h_0)$. Donc h est bornée et continue sur $\mathbb{R}$: $h \in E$.

10. **10.1.** En utilisant le théorème de convergence dominée :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto \arctan(tx)\dfrac{1}{1+t^2}$ est continue par morceaux sur $[0,+\infty[$.
- Pour tout $t \in]0,+\infty[$, $\arctan(tx)\dfrac{1}{1+t^2} \to \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$ lorsque $x \to +\infty$, et $t \mapsto \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$.
- Pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[$, $\left|\arctan(tx)\dfrac{1}{1+t^2}\right| \leqslant \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$ et $t \mapsto \dfrac{\pi}{2(1+t^2)}$ est continue par morceaux et intégrable sur $]0,+\infty[$.

Ainsi, $g(x)$ tend vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\pi}{2(1+t^2)}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}$ lorsque $x \to +\infty$.

10.2. D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètres :

pour tout $x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)}\mathrm{d}t$.

10.3. Soit $x > 0$, $g\left(\frac{1}{x}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan\left(\frac{t}{x}\right)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = -\int_{+\infty}^{0} \arctan\left(\frac{1}{ux}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\frac{\mathrm{d}u}{u^2}$ en posant $u = \frac{1}{t}$.

Donc $g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\arctan(tx) + \arctan\left(\frac{1}{tx}\right)\right)\frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{4}$ d'après la question de cours.

10.10.4.1. Soit $A(x) = \dfrac{x^2}{x^2-1}$ et $B(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$. Alors $F(T) = \dfrac{1}{(1+Tx^2)(1+T)} = A(x)\dfrac{1}{1+Tx^2} + B(x)\dfrac{1}{1+T}$.

10.4.2. D'après la question précédente, pour tout $t \in]0, +\infty[$, $\dfrac{t}{(1+t^2x^2)(1+t^2)} = A(x)\dfrac{t}{1+t^2x^2} + B(x)\dfrac{t}{1+t^2}$Puis, on fixe $N > 0$, $A(x)\displaystyle\int_0^N \frac{t}{1+t^2x^2} + B(x)\int_0^N \frac{t}{1+t^2}dt = A(x)\frac{1}{2x^2}[\ln(1+t^2x^2)]_0^N + B(x)\frac{1}{2}[\ln(1+t^2)]_0^N = \frac{1}{2(x^2-1)}(\ln(1+N^2x^2) - \ln(1+N^2)) = \frac{\ln\left(\frac{1+N^2x^2}{1+N^2}\right)}{2(x^2-1)}$. Or, $\ln\left(\dfrac{1+N^2x^2}{1+N^2}\right) \to 2\ln(x)$ lorsque $N \to +\infty$.

Donc $g'(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}$.

10.4.3. Comme g est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$, g' est continue sur $]0, +\infty[$. Donc $g'(1) = \displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}$.

10.5. D'après l'expression de g' trouvée précédemment, g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi^2}{4}$, et d'après la question **10.3.**, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g(x) = 0$. Enfin, $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} g'(x) = +\infty$.

Ainsi, la courbe représentative de g admet deux asymptotes $y = \pm\dfrac{\pi^2}{4}$ en $\pm\infty$ et une tangente verticale en 0.

EXERCICE 2

Questions préliminaires

1. *Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. On note $g = Re(f)$ et $h = Im(f)$ ainsi $f = g + \mathrm{i}h$.*

Montrer que $\overline{\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, dt} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\, dt$.

Par définition, $\overline{\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t} = \overline{\int_0^{2\pi} g\,\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_0^{2\pi} h\,\mathrm{d}t} = \int_0^{2\pi} g\,\mathrm{d}t - \mathrm{i}\int_0^{2\pi} h\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \overline{f(t)}\,\mathrm{d}t$.

2. *Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. On suppose que l'on a : $\forall z \in \mathbb{U},\ P(z) = 0$.*
Justifier que P est le polynôme nul.
Le polynôme P a une infinité de racines, donc P est le polynôme nul.

3. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$, montrer que $z \in \mathbb{U}$ si et seulement si $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.*

Par définition, $z \in \mathbb{U} \iff |z| = 1 \iff z\overline{z} = 1 \iff \overline{z} = \dfrac{1}{z}$.

4. *Soient $P = 1 + iX$ et $\theta \in \mathbb{R}$.*
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\overline{P(e^{i\theta})}$.
On a $P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 1 + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = 1 + \mathrm{i}\cos(\theta) - \sin(\theta)$. Donc $\mathrm{Re}(\overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}) = 1 - \sin(\theta)$ et $\mathrm{Im}(\overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}) = -\cos(\theta)$.

5. *Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Justifier que la trace de la matrice A est égale à la somme de ses valeurs propres comptées avec leur ordre de multiplicité.*
Comme χ_A est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, la matrice A est trigonalisable. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A (comptées avec multiplicités). Il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ inversible et $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ triangulaire telles que $A = PTP^{-1}$. De plus, on peut supposer que les coefficients diagonaux de T sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Ainsi, $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P^{-1}PT) = \mathrm{tr}(T) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$.

*****

Soit n un entier naturel non nul.

6. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de E_n, on pose :

$$\varphi(P, Q) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})}\, Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})\, \mathrm{d}\theta$$

6.1. *Soient k et ℓ deux entiers naturels de $[\![0, n]\!]$. Évaluer $\varphi(X^k, X^\ell)$.*

$$\varphi(X^k, X^\ell) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\theta}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\ell\theta}\, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\ell-k)\theta}\, \mathrm{d}\theta = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

6.2. *Soient $a \in \mathbb{C}$ et P, Q, R trois éléments de E_n. Montrer que l'on a :*

- $\varphi(aP + Q, R) = \overline{a}\,\varphi(P, R) + \varphi(Q, R)$
- $\varphi(P, aQ + R) = a\,\varphi(P, Q) + \varphi(P, R)$
- $\varphi(Q, P) = \overline{\varphi(P, Q)}$.

Les deux premiers sont immédiats par linéarité de l'intégrale. Le troisième découle de la première question préliminaire.

6.3. *Soit $P \in E_n$. Montrer que $\varphi(P, P)$ est un réel positif ou nul.*
Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, $\overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})}\, P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta}) = \left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})\right|^2$ qui est un réel positif. Donc $\varphi(P, P)$ est un réel positif ou nul par positivité de l'intégrale.

6.4. *Soit $P \in E_n$. Prouver l'équivalence : $\varphi(P, P) = 0 \iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$*
La fonction $\theta \mapsto \left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta})\right|^2$ est continue et positive sur $[0, 2\pi]$. Donc, par stricte positivité de l'intégrale, $\varphi(P, P) = 0 \iff \forall \theta \in [0, 2\pi], P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = 0$. D'après la deuxième question préliminaire, $\varphi(P, P) = 0 \iff P = 0_{\mathbb{R}[X]}$.

6.5. Soit Q_0 un polynôme de E_n avec $Q_0 = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. On note $M = \sup_{z\in\mathbb{U}} |Q_0(z)|^2$.

6.5.1. *Calculer $\varphi(Q_0, Q_0)$ à l'aide des coefficients de Q_0.*
*On pourra utiliser les questions **6.2** et **6.1**.*
En posant $a_n = 1$, on applique les formules démontrées à la question **6.2** et à la question **6.1** :

$$\varphi(Q_0, Q_0) = \varphi\left(X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k, X^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j X^j\right) = \sum_{0\leqslant k,j\leqslant n} \overline{a_k} a_j \varphi(X^k, X^j) = 2\pi \sum_{k=0}^{n} |a_k|^2.$$

6.5.2. *Démontrer que $M \geqslant 1$.*
On a aussi, $\varphi(Q_0, Q_0) \leqslant 2\pi M$. Or, comme $a_n = 1$, $\varphi(Q_0, Q_0) \geqslant 2\pi$. Ainsi, $M \geqslant 1$.

6.5.3. *Prouver que $M = 1$ si, et seulement si, $Q_0 = X^n$.*
Déjà, si $Q_0 = X^n$, on a directement $M = 1$.
Réciproquement, si $M = 1$, alors $2\pi \leqslant \varphi(Q_0, Q_0) \leqslant 2\pi$, donc $\varphi(Q_0, Q_0) = 2\pi = 2\pi + 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|^2$. Ainsi, pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = 0$, et $Q_0 = X^n$.

EXERCICE 3

1. **1.1.** On applique le cours pour trouver : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^{n-1}\left(u_1 - \dfrac{b}{1-a}\right) + \dfrac{b}{1-a}$.

1.2.
- Si $|a| < 1$ ou si $u_1 = \dfrac{b}{1-a}$, alors $u_n \to \dfrac{b}{1-a}$.
- Sinon, si $a > 1$, $u_n \to \pm\infty$ suivant le signe de $u_1 - \dfrac{b}{1-a}$, et si $a < -1$, alors (u_n) diverge.

2. Il y aura toujours au moins une case non vide, et au plus n après n lancers, sachant toutefois qu'on ne peut dépasser N cases non vides dans le cas où $N < n$ donc :

$$T_n(\Omega) = \{1; 2; \ldots; \min(n, N)\}.$$

3. Après 1 lancer, il y aura toujours exactement une case non vide (celle dans lequel on a lancé la boule), donc $T_1 = 1$ (variable aléatoire constante).
Au deuxième lancer, soit on relance dans la même case qu'au premier, et on a alors $T_2 = 1$, soit on lance dans une autre et $T_2 = 2$. La probabilité de lancer dans la même case étant $\dfrac{1}{N}$, on a :

$$P(T_2 = 1) = \frac{1}{N}, \text{ et } P(T_2 = 2) = \frac{N-1}{N}.$$

4. Pour avoir $T_n = 1$, il faut avoir obtenu à chaque lancer à partir du deuxième la même case qu'au premier lancer, ce qui se produit avec probabilité $\dfrac{1}{N}$ à chaque lancer, soit $P(T_n = 1) = \left(\dfrac{1}{N}\right)^{n-1}$.
Le nombre de tirages donnant $T_n = 2$ est obtenu en choisissant deux cases parmi les N, puis en se laissant deux possibilités à chaque tirage, et en supprimant à la fin les 2 tirages où on a tiré toujours dans la même case, soit $\dbinom{N}{2} \times (2^n - 2) = (2^{n-1} - 1)N(N-1)$. Ceci est à diviser par le nombre total de tirages, qui vaut N^n, donc :

$$P\left(T_n = 2\right) = \frac{(N-1)(2^{n-1}-1)}{N^{n-1}}.$$

5. Si $n \leqslant N, T_n = n$ si on tombe dans une nouvelle case à chaque tirage, ce qui correspond à $N(N-1)\dots(N-n+1)$ tirages, soit :

$$P\left(T_n = n\right) = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{N^n} = \frac{N!}{(N-n)!N^n}.$$

Si $n > N$, on ne peut pas avoir n cases non vides, donc $P\left(T_n = n\right) = 0$.

6. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Les évènements $(T_n = i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ forment un système complet d'évènements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$P\left(T_{n+1} = k\right) = \sum_{i=1}^{n} P\left(T_n = i\right) P_{T_n=i}\left(T_{n+1} = k\right).$$

Parmi les probabilités conditionnelles apparaissant dans cette formule, seules deux sont non nulles :

- soit on avait déjà k cases non vides après n tirages et on a à nouveau tiré dans une de ces k cases (probabilité $P_{T_n=k}\left(T_{n+1} = k\right) = \dfrac{k}{N}$).
- soit on en avait $k-1$ non vides et on a tiré dans une des $N-(k-1)$ cases restantes :

$$P_{T_n=k-1}\left(T_{n+1} = k\right) = \frac{N-k+1}{N}$$

.

7. **7.1.** Comme $T_n(\Omega) \subset [\![1,n]\!]$, on a bien $G(x) = \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k)x^k$.

7.2. Notons pour commencer que la formule de la question 6 reste en fait valable pour $k = n+1$, puis sommons ces égalités :

$$G_{n+1}(x) = \sum_{k=1}^{n+1} P(T_{n+1})x^k$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{k}{N} P\left(T_n = k\right) + \frac{N-k+1}{N} P\left(T_n = k-1\right)\right) x^k$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n+1} kP\left(T_n = k\right) x^k + (N-k+1)P\left(T_n = k-1\right) x^k$$

$$= \frac{x}{N} \sum_{k=1}^{n} kP\left(T_n = k\right) x^{k-1} + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{n} (N-k)P\left(T_n = k\right) x^{k+1}$$

$$= \frac{x}{N} G_n'(x) + \frac{x}{N} \sum_{k=1}^{n} NP\left(T_n = k\right) x^k - \frac{x^2}{N} \sum_{k=1}^{n} kP\left(T_n = k\right) x^{k-1}$$

$$= \frac{x}{N} G_n'(x) + xG_n(x) - \frac{x^2}{N} G'n(x)$$

7.3. Dérivons donc :

$$G'_{n+1}(x) = \frac{1}{N}(1-2x)G'_n(x) + \frac{1}{N}\left(x - x^2\right)G''_n(x) + G_n(x) + xG'_n(x).$$

En prenant $x = 1$ (ce qui a le bon goût d'annuler le terme faisant intervenir la dérivée seconde) et en réutilisant les résultats précédents, on a

$$\mathbb{E}\left(T_{n+1}\right) = -\frac{1}{N}\mathbb{E}\left(T_n\right) + 1 + \mathbb{E}\left(T_n\right) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)\mathbb{E}\left(T_n\right) + 1$$

car $\mathbb{E}\left(T_n\right) = G'_n(1)$.

7.4. Posons $u_n = \mathbb{E}(T_n)$ alors (u_n) est une suite vérifiant $u_{n+1} = au_n + b$. On sait calculer son terme général :

$$\mathbb{E}(T_n) = N - \frac{(N-1)^n}{N^{n-1}} = N(1-(1-\frac{1}{N})^n)$$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n) = N$.

7.5. X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$.

On sait que $T_n = \sum\limits_{k=1}^{N} X_i$ donc :

$$\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}(X_i) = \sum_{k=1}^{N} 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n = N\left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$$

EXERCICE 4

1. Pour $n = 3$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Si $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, alors $-A = (-a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$. Soit $(i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3$, alors

$$-a_{ij} = -a_{ik}a_{kj} \neq (-a_{ik})(-a_{kj})$$

sauf, bien sûr, si $A = 0_n$.

3. Soit $A = (a_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice équitable. Si on note $A^\top = (b_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, avec donc $b_{ij} = a_{ji}$, on :

$$\forall (i,j,k) \in [\![1,n]\!]^3, b_{ij} = a_{ji} = a_{jk}a_{ki} = b_{ik}b_{kj}.$$

Ainsi, $A^\top$ est également équitable.

4. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, alors

$$a_{ii} = a_{ij}a_{ji} = a_{ji}a_{ij} = a_{jj}$$

On a donc bien l'égalité souhaitée.

5. La matrice A est non nulle, il existe donc un couple (i, j) tel que $a_{ij} \neq 0$. On a alors

$$a_{ij} = a_{ii}a_{ij},$$

donc, comme $a_{ij} \neq 0$, $a_{ii} = 1$. On a montré à la question **4.** que tous les coefficients diagonaux sont égaux. On en déduit que $a_{kk} = 1$.

6. D'après la question précédente, les coefficients diagonaux d'une matrice équitable non nulle sont égaux à 1. Donc les coefficients diagonaux de $A + B$ sont égaux à 2 : la matrice $A + B$ est non nulle et non équitable.

7. Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, alors

$$1 = a_{ii} = a_{ij}a_{ji},$$

On en déduit que $a_{ij} \neq 0$.

8. Avec la question précédente, $a_{1j} = \dfrac{1}{a_{j1}}$, donc $a_{ij} = a_{i1}a_{1j} = a_{i1}\dfrac{1}{a_{j1}} = \dfrac{a_{i1}}{a_{j1}}$. On peut aussi appliquer directement la définition à a_{i1} :

$$a_{i1} = a_{ij}a_{j1} \text{ donc } a_{ij} = \frac{a_{i1}}{a_{j1}}$$

9. **9.1.** La $j$ième colonne de A est

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

donc, d'après la question précédente :

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{j1}} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

Toutes les colonnes de la matrice A sont donc colinéaires. Ainsi A est de rang 1.

9.2. Soit $A^2 = (c_{ij})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$, alors d'après la formule du produit matriciel, on a

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj},$$

donc, comme A est équitable, $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ij} = na_{ij}$.

On a donc

$$A^2 = nA$$

.

9.3. Le polynôme $X^2 - nX$ est un polynôme annulateur de A et il est scindé à racines simples. A est donc diagonalisable.

9.4. On sait que A est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(A)$ est de dimension $n-1$ puisque $\mathrm{rg}(A) = 1$. On en déduit que $\mathrm{Ker}(A - nI_n)$ est de dimension 1, la matrice A est donc bien semblable à $\mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$.

9.5. La matrice J est aussi de rang 1 donc admet 0 pour valeur propre de multiplicité $n-1$. Comme $\mathrm{tr}(J) = n$, n est valeur propre de J de multiplicité 1. Ainsi, A et J sont toutes les deux semblables à $\mathrm{diag}(n, 0, \ldots, 0)$ donc A est semblable à J.

10. Avec la question **8.**, on a $a_{ji} = \dfrac{1}{a_{ij}}$.

On a donc A est symétrique, si et seulement si, $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{ij} = \dfrac{1}{a_{ij}}$, ce qui est équivalent à $a_{ij}^2 = 1$.

On a montré que A est symétrique si et seulement si ses coefficients valent 1 ou -1.

11. On remarque que le premier coefficient a_{11} vaut nécessairement 1. On fixe les coefficients de la première colonne, on a deux choix pour chacun donc 2^{n-1} choix. Une fois la première colonne fixée, les autres seront des multiples de la première et comme on connaît la valeur d'un de leur coefficient (celui diagonal), il n'y a plus aucun choix à faire. On a donc 2^{n-1} éléments.

12. Même raisonnement qu'au dessus, on a $\#G^{n-1}$ matrices équitables à coefficients dans G.

13. D'après la question précédente, il y a 2 matrices possibles ($\mathbb{U}_2 = \{-1, 1\}$) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

COMMENTAIRES

• Commentaires généraux

Tout d'abord, comme l'an dernier, les mêmes remarques générales :
- Les correcteurs ont signalé à de nombreuses reprises un nombre important de copies mal ordonnées, mal présentées, raturées (la rédaction de la copie ne doit pas occasionner un jeu de piste pour l'examinateur) : **les étudiants doivent s'appliquer à présenter une copie claire et propre**.
Nous nous interrogeons d'ailleurs sur l'opportunité de mettre des points de présentation.
- Trop de candidats utilisent des abréviations utilisées par leurs professeurs mais qui n'ont pas toujours de sens pour le correcteur : il vaut mieux les éviter.
- De même, il est préférable de ne pas écorcher le nom et l'orthographe des théorèmes cités : on voit par exemple trop souvent le « le théorème spectrale » etc.
- Il est rappelé que les copies doivent être correctement numérotées, dans un ordre cohérent.
- Notons que nous avons de nouveau rencontré cette année des copies quasiment illisibles et donc lourdement pénalisées.
- Signalons aussi que l'orthographe fantaisiste donne une très mauvaise impression à la lecture de la copie.

- Il semble judicieux d'éviter d'utiliser des expressions telles que « il est trivial que », « par une récurrence immédiate », « il est clair que » « forcément » etc... qui indisposent le correcteur : toute proposition énoncée dans une copie se doit d'être démontrée.
- De la même façon, les examinateurs ne goûtent guère des arguments inventés ou fallacieux pour arriver à toute force au résultat annoncé dans l'énoncé : la donnée d'un tel résultat permet en général de poursuivre la résolution de l'exercice sans avoir pu le démontrer : nous apprécions le candidat qui admet clairement le résultat en question pour continuer.
- Il ne suffit pas d'écrire « je peux utiliser le théorème car ses hypothèses sont vérifiées »... , encore faut-il les vérifier !
- Cette année, nous avons demandé des représentations graphiques de fonctions : nous avons pu constater que beaucoup de candidats n'y attachent pas assez d'importance et souvent les bâclent : elles permettent pourtant d'aider à la compréhension de la notion étudiée et nous sommes très attentifs au soin qu'ils y apportent.
- Nous conseillons fortement aux candidats de prendre le temps de se relire car cela permet souvent d'éviter des erreurs basiques : par exemple, dans un développement limité, les deux termes de l'égalité ne tendent pas vers la même limite, etc...
- Enfin, un exemple même s'il permet souvent d'aider dans la perception du problème, ne permet pas de démontrer un résultat général.

Les quatre exercices constituant le sujet permettaient de parcourir les parties les plus classiques du programme de deuxième année de classe préparatoire MPI.
- Rappelons qu'une lecture attentive de la totalité du sujet permet souvent de comprendre l'architecture et la démarche proposée dans chaque exercice.
- Un trop grand nombre d'étudiants ne maîtrise pas les notions de base d'algèbre linéaire, même de première année, ainsi que les théorèmes principaux d'analyse du programme de deuxième année de MPI et espèrent cependant venir à bout des questions posées en utilisant des recettes toutes faites bien souvent mal comprises.
En exemple, le Théorème du rang appliqué à une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ prend parfois des formes étranges : $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{R})) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A))$ ou encore, $\dim(A) = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A))$!
- Nous constatons de nouveau une très grande maladresse dans les calculs (parfois très simples) qui sont trop rapidement abandonnés :
* Les opérations sur les puissances posent encore beaucoup de problème à nombre de candidats.
* On trouve encore trop d'équivalents à 0...
- Les quantificateurs, les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$ sont trop souvent malmenés, voire oubliés lorsqu'ils sont fondamentaux.
- Rappelons que lorsqu'il y a plusieurs variables qui interviennent, il est judicieux de préciser pour quelle variable on cherche un équivalent : une écriture du style $t^{p(n+1)} \underset{+\infty}{\sim}$ ... ne veut pas dire grand chose.
- Reste à signaler que les probabilités génèrent un refus de beaucoup de candidats : près de 30% des candidats n'abordent pas cet exercice : rappelons que nous posons systématiquement un exercice de probabilité.

<u>**Conclusion**</u> : Nous souhaitons obtenir dans la résolution des exercices proposés **de la rigueur**, **une rédaction claire et lisible** et **une justification des résultats en utilisant à bon escient le cours** : ainsi, nous encourageons les candidats à rédiger le plus proprement, correctement et rigoureusement possible

leurs copies, en détaillant clairement les calculs effectués et les théorèmes utilisés à chaque étape de la résolution, sans forcément chercher à tout traiter de façon superficielle.
Nous rappelons enfin qu'il vaut mieux admettre clairement le résultat d'une question et avancer dans la résolution du reste de l'exercice plutôt que de donner des arguments faux qui indisposent nécessairement le correcteur.
Nous proposons chaque année dans ce rapport une correction du sujet et invitons vivement les candidats à l'étudier attentivement.

• Commentaires par exercices

Nous avons compilé un certain nombres d'erreurs constatées sur les copies qu'il nous semble important de signaler dans ce rapport afin d'espérer ne plus les rencontrer l'an prochain.

• **Exercice 1**.
Thème de l'exercice : Étude de l'application qui à toute fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$ associe la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \arctan(tx) \times \frac{f(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

- **Questions de cours** : Des questions simples sur la fonction arctan.
  La représentation graphique de la fonction arctan est souvent bâclée.
  On a trop souvent vu : $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, lorsque cela est traité !
  Une fonction de dérivée nulle n'est constante que sur un **intervalle** où sa dérivée est nulle.
  Beaucoup de candidats confondent fonction majorée et fonction bornée.
- Pour les théorèmes de continuité/dérivabilité sous le signe somme il est impératif de connaître (et citer) les hypothèses, comme cela est demandé dans l'énoncé.
  A ce sujet, nous avons apprécié le travail de certains collègues qui recommandent à leurs étudiants de noter H1, H2, H3 et H4 les hypothèses de ces théorèmes important du programme : continuité, limites, dérivabilité des intégrales à paramètre.
  La continuité de l'intégrande ne suffit pas à garantir la continuité de la fonction définie par une intégrale.
  De la même façon on ne peut pas simplement prendre la dérivée sous l'intégrale ou passer à la limite dans l'intégrale sans aucune précaution.
  Trop souvent, le fait que l'intégrande soit borné suffit pour assurer la continuité et la dérivabilité des intégrales à paramètre.
  Parfois encore, le candidat calcule les limites en l'infini de l'intégrande pour conclure sur la continuité de l'intégrale à paramètre.
  Dans la question **10.1.**, un grand nombre d'étudiants parlent du théorème de convergence dominée, sans domination ou sans limite, avec souvent l'oubli de $t = 0$.
- La décomposition en éléments simples de la question **10.4.1** est souvent fausse du fait du mélange des deux variables bien que l'énoncé soit clair en posant $F(T) = ...$
- On a souvent vu que l'on prolongeait g' en alors que l'on a démontré qu'elle était de classe C^1 sur

$\mathbb{R}_+^*$.
- De rares candidats ont abordé et bien traité la question **10.5.**

• **Exercice 2**.
Thème de l'exercice : Quelques résultats autour de l'application φ qui à tout couple de polynômes (P, Q) de $\mathbb{C}_n[X]$ associe $\varphi(P, Q) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\, Q(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\, \mathrm{d}\theta$.

- Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ n'est pas toujours diagonalisable.
- Décidément, les nombres complexes sont très mal maîtrisés par les candidats.
- Beaucoup d'erreurs dans le calcul des parties réelles et imaginaires de $\overline{P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}$.
- La plupart des étudiants reviennent systématiquement à l'écriture $z = a + \mathrm{i}b$ dans tous les calculs.
- Dans la question **Q6.1.**, trop de candidats oublient de traiter le cas $k = \ell$.
  Par ailleurs, le calcul de $\varphi(X^k, X^\ell)$ est souvent faux, ce qui empêche de traiter les questions **6.3.**, **6.4.** et **6.5.**
  De nombreux candidats se croient obligés de passer par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathrm{i}\sin(\theta)$ pour déterminer les primitives qui interviennent dans le calcul de $\varphi(X^k, X^\ell)$.
- Les raisonnements restent peu rigoureux pour prouver que $\varphi(P, P) = 0 \iff P = 0$. L'argument d'une infinité de racines pour le polynôme P est souvent oublié.

• **Exercice 3**.
Thème de l'exercice : Exercice de probabilité sur un lancer de n boules dans N cases.

- Question peu réussie : il est impératif de savoir calculer le terme général d'une suite arithmético-géométrique.
- Le calcul de la loi d'une variable aléatoire doit être justifié : trop de résultats sont proposés sans aucune justification.
  ‘
- La formule des probabilités composées apparaît rarement dans les copies.

• **Exercice 4**.
Thème de l'exercice : Quelques propriétés des matrices équitables.
- Les candidats mélangent matrices et terme générique de la matrice, ce qui amène des inepties : par exemple, $A^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.
- Certains candidats pensent que si une matrice est non nulle, tous ses coefficients sont non nuls !
- On note un manque crucial de quantificateurs dans les démonstrations.
  L'examinateur ne sait pas trop s'il existe une couple (i, j) tel que ... ou si ce qu'utilise le candidat est vrai pour tous les couples (i, j) !
- On ne peut invoquer la question **7.** pour répondre à la question **5.**

FIN