CONCOURS COMMUN INP

ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE MPI

MATHÉMATIQUES 2

Durée : 4 heures

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- *Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition ; d'autres couleurs, excepté le vert, bleu clair ou turquoise, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.*
- *Ne pas utiliser de correcteur.*
- *Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.*

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de deux exercices et d'un problème.

EXERCICE 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
On se donne des réels strictement positifs notés $x_1, \dots, x_n$ et on pose :

$$m = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j \,.$$

On désigne par $S_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques définies positives d'ordre n.

Q1. Démontrer l'inégalité suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{x_k}{m}\right) \leq \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{x_k}{m} - 1\right).$$

Q2. En déduire l'inégalité :

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \,.$$

Q3. Établir que l'inégalité précédente est une égalité si, et seulement si, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Q4. Dans cette question B désigne une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$. Démontrer l'inégalité :

$$(\det(B))^{1/n} \leq \frac{1}{n}\operatorname{Tr}(B),$$

et établir que c'est une égalité si, et seulement si, $B \in \operatorname{Vect}(I_n)$.

Désormais $A = (a_{i,j})$ désigne une matrice de $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Q5. Démontrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on a : $a_{i,i} > 0$.

Q6. On pose $D = \operatorname{Diag}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{1,1}}}, \frac{1}{\sqrt{a_{2,2}}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{a_{n,n}}}\right)$ et $B = DAD$. Démontrer que $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et en déduire que :

$$\det(A) \leq a_{1,1} \times a_{2,2} \times \cdots \times a_{n,n} \,,$$

avec égalité si, et seulement si, A est diagonale.

EXERCICE 2

On définit une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ en posant $P_0 = 1$, $P_1 = X$ et pour tout entier naturel n :

$$P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n.$$

Dans les questions suivantes, n et k sont des entiers naturels.

Q7. Donner le degré et le terme dominant de P_n en fonction de n.

Q8. Justifier que pour tout réel θ :

$$P_n\big(cos(\theta)\big) = \cos(n\theta).$$

Pour P et Q dans $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Q9. Justifier la convergence de cette intégrale.

Q10. Démontrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_k[X]$ (ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à k).

Q11. Calculer pour n et m entiers naturels, $\int_0^{\pi} \cos(n\theta)\cos(m\theta)\,d\theta$.

Q12. Donner une base orthonormale de $\mathbb{R}_k[X]$ pour ce produit scalaire.

PROBLÈME - Matrices de rang 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n, $M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre n et $M_{1,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes réelles d'ordre n.

Partie I - Exemples

On suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in \left]0,1\right[$. On définit les matrices aléatoires :

$$U=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } M=U\times U^T=\begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & X_1X_3 & \cdots & \cdots & X_1X_n \\ X_2X_1 & X_2^2 & X_2X_3 & \cdots & \cdots & X_2X_n \\ X_3X_1 & X_3X_2 & X_3^2 & \cdots & \cdots & X_3X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_nX_1 & X_nX_2 & X_nX_3 & \cdots & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}.$$

Q13. On pose $Y = \mathrm{rg}(M)$.
Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-(1-p)^n$.

Q14. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\mathrm{Tr}(M)$.

Q15. Vérifier que $M^2 = \mathrm{Tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

Q16. Dans cette question, on suppose que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la matrice aléatoire M comme ci-dessus. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

Q17. On note J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner son rang et sa trace, puis la diagonaliser (on précisera une matrice de passage).

Q18. Donner (en le justifiant) une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable. Préciser sa trace.

Partie II - Résultats généraux

Dans cette partie, A désigne une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de rang égal à 1.

Q19. On note $C \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ la première colonne non nulle de A. Démontrer qu'il existe une matrice ligne $L \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A = C \times L$.

Q20. Calculer le réel $L \times C$ et en déduire que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.

Q21. Déterminer le polynôme caractéristique de A ainsi que son polynôme minimal.

Q22. Établir que :

$$A \text{ est diagonalisable } \iff \operatorname{Tr}(A) \neq 0.$$

On note désormais u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à A.

Q23. On suppose que $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Justifier que $\operatorname{Im}(u) \subseteq \operatorname{Ker}(u)$, puis qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & (0) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Q24. On suppose que $\operatorname{Im}(u) \cap \operatorname{Ker}(u) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$.
Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle u est représenté par la matrice :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & (0) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

où a est un réel non nul.

Q25. Conclure que dans $M_n(\mathbb{R})$ deux matrices de rang 1 sont semblables si et seulement si elles ont la même trace.

FIN