Concours d'Admission 2025 - Mathématiques C (ULSR) Filières MP-MPI

Écoles Normales Supérieures
Vendredi 18 avril 2025

Durée : 4 heures
L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Fonctions d'un grand nombre de variables aléatoires

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Les variables aléatoires sur Ω intervenant dans le problème sont discrètes, à valeurs dans des sous-ensembles dénombrables de $\mathbb{R}$.

Rappels, notations

Soit X une variable aléatoire positive ou nulle, à valeurs dans l'ensemble $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}_+$. L'espérance de X est

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathbb{P}\left(X = x_n\right) \tag{1}$$

Dans le cas général où X est une variable aléatoire à valeurs dans l'ensemble $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, et si $\mathbb{E}[|X|]$ est finie, l'espérance de X est par définition la quantité

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{n=0}^{\infty} x_n \mathbb{P}\left(X = x_n\right) = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=0}^{m} x_n \mathbb{P}\left(X = x_n\right) \tag{2}$$

Si $\mathbb{E}\left[X^2\right]$ est finie, alors $\mathbb{E}[|X|]$ est finie et on a

$$(\mathbb{E}[|X|])^2 \leq \mathbb{E}\left[X^2\right] \tag{3}$$

Dans ce cas, la variance de X est la quantité

$$\operatorname{Var}(X) := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \tag{4}$$

On rappelle l'expression alternative

$$\operatorname{Var}(X) = \mathbb{E}\left[X^2\right] - (\mathbb{E}[X])^2 \tag{5}$$

On rappelle aussi l'inégalité de Markov : si X est une variable aléatoire positive ou nulle d'espérance finie et $t > 0$, alors

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{1}{t} \mathbb{E}[X] \tag{6}$$

On dit que des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_N$ sont indépendantes si

$$\mathbb{E}\left[\psi_1\left(X_1\right) \cdots \psi_N\left(X_N\right)\right] = \mathbb{E}\left[\psi_1\left(X_1\right)\right] \cdots \mathbb{E}\left[\psi_N\left(X_N\right)\right] \tag{7}$$

pour toutes fonctions bornées $\psi_1, \ldots, \psi_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice d'un ensemble A, de sorte que $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon. On appelle constante numérique toute constante absolue (telle que $2, 6, \ln(2), e^3, \cos(46)$, etc.) indépendante des paramètres intervenant par ailleurs, qui sont les suivants : la constante K, le nombre N, et les variables aléatoires $X_1, X_2 \cdots$.

I. Amplitude d'une somme de variables aléatoires

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère N variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ identiquement distribuées et satisfaisant, pour une certaine constante $K \geq 1$, et pour tout $n \in \{1, \ldots, N\}$,

$$\mathbb{P}\left(|X_n| \leq K\right) = 1 \tag{8}$$

et

$$\mathbb{E}\left[X_n\right] = 0, \quad \operatorname{Var}\left(X_n\right) \leq 1 \tag{9}$$

L'objet de cette partie est d'estimer la taille de la somme

$$S_N := X_1 + \cdots + X_N \tag{10}$$

sous diverses hypothèses de dépendance entre les variables X_n pour $n = 1, \ldots, N$.

I.1

Pour $N = 1$, parmi les variables aléatoires de lois usuelles, donner sans justification un exemple de variable aléatoire satisfaisant (8) et deux exemples de variables aléatoires ne satisfaisant pas (8).

I.2

Pour tout $N \geq 1$, donner un exemple de variables aléatoires satisfaisant les hypothèses (8)-(9) et telles que $\mathbb{P}\left(|S_N| \geq N\right) \geq 1/2$.

I.3

On suppose que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ sont deux à deux décorrélées, c'est-à-dire :

$$\forall 1 \leq m, n \leq N, \quad n \neq m \Rightarrow \mathbb{E}\left[X_n X_m\right] = 0 \tag{11}$$

Démontrer que

$$\mathbb{E}\left[|S_N|^2\right] \leq N \tag{12}$$

En déduire que, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|S_N| > t\sqrt{N}\right) \leq \frac{1}{t^2} \tag{13}$$

I.4

Soit k un entier supérieur ou égal à 2. On dit que des variables aléatoires $(Y_n)_{n \geq 1}$ sont k-indépendantes si

$$\mathbb{E}\left[\psi_1\left(Y_{n_1}\right) \cdots \psi_k\left(Y_{n_k}\right)\right] = \mathbb{E}\left[\psi_1\left(Y_{n_1}\right)\right] \cdots \mathbb{E}\left[\psi_k\left(Y_{n_k}\right)\right] \tag{14}$$

pour tous indices $1 \leq n_1 < \cdots < n_k$ et pour toutes fonctions bornées $\psi_1, \ldots, \psi_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

I.4.a

Démontrer que la k-indépendance implique la j-indépendance si $j \leq k$.

I.4.b

Qu'est-ce que la N-indépendance pour N variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_N$?

I.4.c

Soit Y_1 et Y_2 des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{0,1\}$: pour $n = 1, 2$,

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) = \mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{1}{2} \tag{15}$$

Soit Y_3 la variable aléatoire sur $\{0,1\}$ définie par

$$Y_3 := Y_1 + Y_2 \mod 2 \tag{16}$$

Démontrer que les variables aléatoires (Y_1, Y_2, Y_3) sont 2-indépendantes mais pas 3-indépendantes.

I.5

Soit k un entier pair dans $\{2, \ldots, N\}$. On suppose dans cette question que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ sont k-indépendantes. On introduit les notations suivantes : $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble $\{1, \ldots, N\}^k$. Si $T = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathcal{T}$ et $n \in \{1, \ldots, N\}$, on note $m_T(n)$ la multiplicité de n dans T, c'est-à-dire

$$m_T(n) = \mathrm{Card}\{i \in \{1, \ldots, k\}; n_i = n\} \tag{17}$$

Pour $\ell \in \{1, \ldots, k\}$, on note $\mathcal{T}_\ell$ l'ensemble des T dans $\mathcal{T}$ faisant intervenir exactement ℓ indices distincts, et où chacun a une multiplicité au moins 2, à savoir : $T \in \mathcal{T}_\ell$ si

$$\mathrm{Card}\left(\{n \in \{1, \ldots, N\}; m_T(n) > 0\}\right) = \ell \tag{18}$$

et

$$\forall n \in \{1, \ldots, N\}, \quad m_T(n) > 0 \Rightarrow m_T(n) \geq 2 \tag{19}$$

Enfin, on notera $|\mathcal{T}_\ell|$ le cardinal de $\mathcal{T}_\ell$.

I.5.a

Déterminer $|\mathcal{T}_1|$ et $|\mathcal{T}_\ell|$ pour $\ell > k/2$.

I.5.b

Justifier

$$\mathbb{E}\left[(S_N)^k\right] = \sum_{T \in \mathcal{T}} \prod_{n=1}^{N} \mathbb{E}\left[X_n^{m_T(n)}\right] \tag{20}$$

puis

$$\mathbb{E}\left[(S_N)^k\right] = \sum_{\ell=1}^{k/2} \sum_{T \in \mathcal{T}_\ell} \prod_{n=1}^{N} \mathbb{E}\left[X_n^{m_T(n)}\right] \tag{21}$$

I.5.c

Démontrer que

$$\mathbb{E}\left[(S_N)^k\right] \leq \sum_{\ell=1}^{k/2} K^{k-2\ell} |\mathcal{T}_\ell| \tag{22}$$

I.5.d

Soit $\ell \in \{1, \ldots, k/2\}$. Justifier l'estimation suivante :

$$|\mathcal{T}_\ell| \leq \binom{N}{\ell} \ell^k \leq \frac{N^\ell}{\ell!} \ell^k \tag{23}$$

On pourra considérer l'ensemble des $T \in \mathcal{T}$ faisant intervenir au plus ℓ éléments distincts.

I.5.e

Pour $\ell \in \{1, \ldots, k/2\}$, démontrer que

$$\ell! \geq \ell^k e^{-\ell} \tag{24}$$

puis en déduire que

$$|\mathcal{T}_\ell| \leq (Ne)^\ell \left(\frac{k}{2}\right)^{k-\ell} \tag{25}$$

I.5.f

Démontrer que

$$\mathbb{E}\left[(S_N)^k\right] \leq \left(\frac{Kk}{2}\right)^k \sum_{\ell=1}^{k/2} \left(\frac{2Ne}{kK^2}\right)^\ell \tag{26}$$

I.5.g

On suppose

$$kK^2 \leq N \tag{27}$$

Démontrer que

$$\mathbb{E}\left[(S_N)^k\right] \leq \frac{\theta}{\theta - 1} \left(\frac{Nek}{2}\right)^{k/2} \leq 2 \left(\frac{Nek}{2}\right)^{k/2} \tag{28}$$

où

$$\theta := \frac{2Ne}{kK^2} \tag{29}$$

I.5.h

Démontrer (sous l'hypothèse (27)) l'estimation suivante : pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|S_N| \geq t\sqrt{N}\right) \leq 2\left(\frac{\sqrt{ek/2}}{t}\right)^k \tag{30}$$

I.6

On suppose maintenant que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ sont indépendantes, de sorte qu'elles sont k-indépendantes pour tout $k \in \{2, \ldots, N\}$. On veut maintenant établir la borne suivante : il existe des constantes numériques $\alpha, \beta > 0$ (indépendantes de $K \geq 1$ et N) telles que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}\left(|S_N| \geq t\sqrt{N}\right) \leq \beta \exp\left(-\alpha t^2/K^2\right) \tag{31}$$

I.6.a

Justifier qu'il suffit de considérer le cas $K = 1$, ce que l'on fera dans les trois questions suivantes.

I.6.b

Soit k le plus grand entier pair de $\{1, \ldots, N\}$ inférieur ou égal à $\frac{2t^3}{e^2}$. Justifier que (27) est satisfaite si

$$e \leq t \leq \frac{e}{\sqrt{2}}\sqrt{N} \tag{32}$$

I.6.c

Sous l'hypothèse (32), démontrer qu'on a (31) avec

$$\beta = 2e, \quad \alpha = e^{-2} \tag{33}$$

I.6.d

Conclure qu'il existe des constantes numériques $\alpha, \beta > 0$ telles que (31) est vérifiée pour tout $t \geq 0$.

II. Concentration de combinaisons de variables aléatoires

L'espace $\mathbb{R}^N$ est muni du produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme euclidienne associée, notée $|\cdot|$: pour $x \in \mathbb{R}^N$,

$$|x|^2 := \langle x, x \rangle^{1/2} \tag{34}$$

Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq N}$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$. On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on a

$$x = \sum_{i=1}^{N} \langle x, e_i \rangle e_i, \quad |x|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\langle x, e_i \rangle|^2 \tag{35}$$

Une fonction $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est dite 1-lipschitzienne si elle vérifie, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^N$,

$$|F(x) - F(y)| \leq |x - y| \tag{36}$$

L'objet de cette partie est la démonstration du résultat suivant.

Théorème 0.1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère N variables aléatoires $X_1, \ldots, X_N$ à valeurs dans un ensemble fini, indépendantes et identiquement distribuées, satisfaisant (8). On note $X = (X_i)_{1 \leq i \leq N}$ le vecteur aléatoire de composantes $X_1, \ldots, X_N$. Alors il existe des constantes numériques $\alpha, \beta > 0$ telles que pour toute fonction 1-lipschitzienne et convexe $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, pour tout $m \in \mathbb{R}$, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(F(X) \geq m) \geq \frac{1}{2} \Longrightarrow \mathbb{P}(F(X) \leq m - t) \leq \beta e^{-\alpha t^2/K^2} \tag{37}$$

On introduit les notations et conventions suivantes. On désigne par Q^N l'hypercube $Q^N := [-K, K]^N$. Notons que le diamètre de Q^N est

$$\operatorname{diam}\left(Q^N\right) := \max\left\{|x - y|; x, y \in Q^N\right\} = 2\sqrt{N}K \tag{38}$$

Soit $x \in Q^N$ et $A \subset Q^N$. Si A est non-vide, on note $d(x, A)$ la distance de x à A définie par

$$d(x, A) := \inf_{a \in A} |x - a| \tag{39}$$

On adopte par ailleurs la convention suivante : si A est vide, alors on pose $d(x, A) = 4NK$ (la valeur précise choisie ici n'a pas grande importance, tant qu'elle reste strictement plus grande que $\operatorname{diam}\left(Q^N\right)$).

II.1

Soit γ une constante numérique positive. On suppose vérifiée la propriété suivante : pour tout ensemble $A \subset Q^N$ convexe,

$$\mathbb{P}(X \in A)\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma \frac{d(X, A)^2}{4K^2}\right)\right] \leq 1 \tag{40}$$

On se donne une fonction 1-lipschitzienne et convexe $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Le but de cette question est de démontrer que (37) est alors vérifiée.

II.1.a

Soient $s, \sigma \in \mathbb{R}$ avec $s < \sigma$. En considérant l'ensemble

$$A_s = \left\{x \in Q^N; F(x) \leq s\right\} \tag{41}$$

montrer que

$$\mathbb{P}(F(X) \leq s)\mathbb{P}(F(X) \geq \sigma) \leq \exp\left(-\gamma \frac{(\sigma - s)^2}{4K^2}\right) \tag{42}$$

II.1.b

Démontrer que (37) est vérifiée.

II.2

Soit x un point arbitraire de Q^N. Soit P^N l'ensemble des sommets de l'hypercube $[0,1]^N$, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons linéaires des e_i pour $i \in \{1, \ldots, N\}$ à coefficients 0 ou 1. Si A est une partie non-vide de Q^N, on définit les sous-ensembles $P_A(x)$ et $R_A(x)$ de P^N comme suit : soit H_i l'hyperplan orthogonal à e_i, engendré par les e_j pour $j \neq i$. Alors $z \in P_A(x)$ si il existe $a \in A$ tel que

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\}, z \in H_i \Longrightarrow a - x \in H_i \tag{43}$$

tandis que $z \in R_A(x)$ si il existe $a \in A$ tel que

$$\forall i \in \{1, \ldots, N\}, z \in H_i \Longleftrightarrow a - x \in H_i \tag{44}$$

II.2.a

Si $z, z' \in P^N$, on note $z \leq z'$ lorsque $\langle z, e_i \rangle \leq \langle z', e_i \rangle$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$. Démontrer que

$$P_A(x) = \left\{ z' \in P^N ; \exists z \in R_A(x), z \leq z' \right\} \tag{45}$$

II.2.b

Soit $x \in \mathbb{R}^N$. Justifier les équivalences

$$x \in A \Longleftrightarrow 0 \in P_A(x) \Longleftrightarrow P_A(x) = P^N \tag{46}$$

II.2.c

En dimension $N = 3$, donner un exemple d'ensemble A pour lequel $e_3 \notin P_A(0)$ et décrire précisément les ensembles $R_A(0)$ et $P_A(0)$ correspondant.
Si B est un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^N$, on note $\Gamma(B)$ l'enveloppe convexe de B, qui est l'ensemble des combinaisons convexes (finies) d'éléments de B :

$$\Gamma(B) := \left\{ \sum_{j=1}^{m} \theta_j z_j ; m \in \mathbb{N}^*, \theta_j \in [0,1], z_j \in B, \sum_{j=1}^{m} \theta_j = 1 \right\} \tag{47}$$

Étant donné $A \subset Q^N$ non-vide et $x \in Q^N$, on définit aussi la quantité

$$q(x, A) := \inf \left\{ |z| ; z \in \Gamma\left(P_A(x)\right) \right\} \tag{48}$$

On adopte par ailleurs la convention suivante : si A est l'ensemble vide, on pose $q(x, A) = 2N$.

II.2.d

Soit B un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^N$. On note $\Gamma_0(B)$ l'ensemble des combinaisons convexes d'au plus $N+1$ éléments de B :

$$\Gamma_0(B) := \left\{ \sum_{j=1}^{N+1} \theta_j z_j ; \theta_j \in [0,1], z_j \in B, \sum_{j=1}^{N+1} \theta_j = 1 \right\} \tag{49}$$

Démontrer que $\Gamma(B) = \Gamma_0(B)$.
Indication : on pourra démontrer que toute combinaison convexe de $m+1$ éléments de B avec $m > N$ peut se réécrire comme combinaison convexe d'au plus m éléments de B.

II.2.e

Soit B un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^N$. Démontrer que $\Gamma(B)$ est un ensemble convexe, et qu'il est compact si B l'est.

II.2.f

Représenter graphiquement et nommer (en tant qu'objet géométrique) l'enveloppe convexe $\Gamma(B)$ en dimension $N = 3$, dans les trois cas suivants :

$$B = \{e_1, e_2, e_1 + e_2\}\,, \quad B = \{e_1, e_2, e_1 + e_2, e_2 + e_3\}\,, \quad B = P^3 \tag{50}$$

Pour chacun de ces exemples, dire si B peut correspondre à un ensemble $P_A(x)$.

II.2.g

Soit $A \subset Q^N$ non-vide et $x \in Q^N$. Justifier que l'inf dans (48) est atteint.

II.2.h

Soit $A \subset Q^N$ non-vide et $x \in Q^N$. Justifier que $q(x, A) \leq \sqrt{N}$. À quelle condition a-t-on $q(x, A) = 0$?

II.2.i

Soit $x \in Q^N$ et $A \subset Q^N$ non-vide. Justifier que

$$q(x, A) = \inf \{|x|; z \in \Gamma (R_A(x))\} \tag{51}$$

II.2.j

Soit $x \in Q^N$ et $A \subset Q^N$ avec A convexe. Démontrer que

$$d(x, A) \leq 2Kq(x, A) \tag{52}$$

II.2.k

Soit $\gamma \geq 0$ une constante numérique. Démontrer que la propriété :

$$\text{« pour tout ensemble } A \subset Q^N \text{ convexe, on a } \mathbb{P}(X \in A)\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma q(X, A)^2\right)\right] \leq 1 \text{ »} \tag{53}$$

implique (37).

II.3

Soit

$$\gamma_0 = \frac{1}{4} \tag{54}$$

L'objet de la fin de cette partie II est la preuve par récurrence sur la dimension N de la propriété (53), pour $\gamma = \gamma_0$. Pour N entier naturel non nul, on introduit donc l'hypothèse de récurrence H_N suivante : «Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit N variables aléatoires $X_1, \dots, X_N$ à valeurs dans un ensemble fini, indépendantes et identiquement distribuées, satisfaisant (8) et soit $X = (X_i)_{1 \leq i \leq N}$ le vecteur aléatoire de composantes $X_1, \dots, X_N$. Alors (53) est vérifiée pour $\gamma = \gamma_0 = \frac{1}{4}$».

II.3.a

On considère le cas $N = 1$. Démontrer que (53) est satisfait lorsque $\gamma \leq \ln(2)$, et donc pour $\gamma = \gamma_0$.
On suppose maintenant $N > 1$, et on se fixe $A \subset Q^N$ convexe. On adopte les notations suivantes : on décompose

$$x = (\overline{x}, x_N) \qquad \text{avec} \qquad \overline{x} = (x_i)_{1 \leq i \leq N-1} \in \mathbb{R}^{N-1} \tag{55}$$

Si $A \subset \mathbb{R}^N$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$A_\theta := \left\{ b \in \mathbb{R}^{N-1}; (b, \theta) \in A \right\} \tag{56}$$

la section de A au niveau θ. On note aussi

$$\overline{A} := \left\{ \overline{a} \in \mathbb{R}^{N-1}; \exists \theta \in \mathbb{R}, (\overline{a}, \theta) \in A \right\} \tag{57}$$

la projection de A sur $\mathbb{R}^{N-1}$.

II.3.b

Soit $x \in Q^N$. Soit $A \subset Q^N$ tel que A_{x_N} soit non-vide. Soit $\overline{z} \in P^{N-1}$. Démontrer que

$$\overline{z} \in P_{A_{x_N}}(\overline{x}) \Longrightarrow (\overline{z}, 0) \in P_A(x) \tag{58}$$

et

$$\overline{z} \in P_{\overline{A}}(\overline{x}) \Longrightarrow (\overline{z}, 1) \in P_A(x) \tag{59}$$

II.3.c

Démontrer que, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$q(x, A)^2 \leq (1 - \lambda)^2 + \lambda q\left(\overline{x}, A_{x_N}\right)^2 + (1 - \lambda) q(\overline{x}, \overline{A})^2 \tag{60}$$

On fixe $x_N \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}\left(X_N = x_N\right) > 0$ et on considère la probabilité

$$\overline{\mathbb{P}}(B) := \mathbb{P}\left(B \mid X_N = x_N\right) = \frac{\mathbb{P}\left(B \cap \{X_N = x_N\}\right)}{\mathbb{P}\left(X_N = x_N\right)} \qquad \text{pour } B \in \mathcal{A} \tag{61}$$

ainsi que l'espérance associée

$$\overline{\mathbb{E}}[Z] := \frac{1}{\mathbb{P}\left(X_N = x_N\right)} \mathbb{E}\left[Z 1_{\{X_N = x_N\}}\right] \tag{62}$$

pour toute variable aléatoire Z.

II.3.d

En admettant l'hypothèse de récurrence H_{N-1}, démontrer

$$\overline{\mathbb{P}}(\overline{X} \in \overline{A}) \overline{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\gamma_0 q(X, A)^2\right)\right] \leq e^{\gamma_0} \tag{63}$$

et justifier que, pour tout $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$\overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in A_{x_N}\right)^\lambda \overline{\mathbb{P}}(\overline{X} \in \overline{A})^{1-\lambda} \overline{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\gamma_0 q(X, A)^2\right)\right] \leq e^{\gamma_0 (1-\lambda)^2} \tag{64}$$

Indication : on pourra admettre l'inégalité de Hölder :

$$\overline{\mathbb{E}}\left[e^{\lambda Y}e^{(1-\lambda)Z}\right] \leq \left\{\overline{\mathbb{E}}\left[e^{Y}\right]\right\}^{\lambda}\left\{\overline{\mathbb{E}}\left[e^{Z}\right]\right\}^{(1-\lambda)} \tag{65}$$

pour $\lambda \in [0,1]$ et Y, Z des variables aléatoires. On prendra par ailleurs soin de bien préciser quel est l'espace probabilisé considéré dans l'application de H_{N-1}.

II.3.e

On suppose

$$\overline{\mathbb{P}}(\overline{X} \in \overline{A}) > 0 \tag{66}$$

et on définit

$$r = \frac{\overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in A_{x_N}\right)}{\overline{\mathbb{P}}(\overline{X} \in \overline{A})} \tag{67}$$

Démontrer que

$$r^{\lambda}e^{-\gamma_0(1-\lambda)^2}\overline{\mathbb{P}}(\overline{X} \in \overline{A})\overline{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\gamma_0 q(X,A)^2\right)\right] \leq 1 \tag{68}$$

II.3.f

On admet provisoirement l'inégalité suivante : pour tout $\gamma \in [0,\gamma_0]$, pour tout $r \in [0,1]$,

$$\frac{1}{2-r} \leq \sup_{\lambda\in[0,1]} r^{\lambda}e^{-\gamma(1-\lambda)^2} \tag{69}$$

Justifier que

$$\overline{\mathbb{P}}(\overline{X} \in \overline{A})\overline{\mathbb{E}}\left[\exp\left(\gamma_0 q(X,A)^2\right)\right] \leq (2-r) \tag{70}$$

On distinguera les cas $\overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in A_{x_N}\right) > 0$ et $\overline{\mathbb{P}}\left(\overline{X} \in A_{x_N}\right) = 0$.

II.3.g

Démontrer que

$$\mathbb{P}(X \in A)\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_0 q(X,A)^2\right)1_{(X_N=x_n)}\right] \leq R(2-r)\mathbb{P}\left(X_N = x_N\right) \tag{71}$$

où

$$R = \frac{\mathbb{P}(X \in A)}{\mathbb{P}(\overline{X} \in \overline{A})} \tag{72}$$

II.3.h Démontrer que

$$\mathbb{P}(X \in A)\mathbb{E}\left[\exp\left(\gamma_0 q(X,A)^2\right)\right] \leq R(2-R) \tag{73}$$

où R est défini dans (72), puis démontrer (53) et conclure l'hérédité $H_{N-1} \Rightarrow H_N$. On prendra bien garde à tenir compte du cas où (66) n'est pas vérifié.

II.3.i Justifier (69).